

J. DOLBNIA

Sur le développement de $\sqrt{R}$ en fraction continue

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10 (1891), p. 134-140

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__134_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LE DÉVELOPPEMENT DE $\sqrt{R}$
EN FRACTION CONTINUE;**

PAR M. J. DOLBIA.

Je me propose d'exposer ici la démonstration très simple des quelques théorèmes insérés dans le Mémoire d'Abel *Sur l'intégration de la formule différentielle*, etc. (1).

THÉORÈME I. — *R étant une fonction entière de x, $\sqrt{R}$ se développe en fraction continue illimitée*

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{y_i}}}}$$

où $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ sont des fonctions entières, y_i est l'un des quotients complets quelconque. Je dis que y_i est racine de l'équation

$$A y_i^2 + 2 B y_i - C = 0,$$

où

$$A = p_i^2 - q_i^2 R,$$

p_i, q_i étant des fonctions entières, et les coefficients A, B, C satisfaisant à l'égalité

$$B^2 - AC = R.$$

(1) *Œuvres complètes*, t. I, p. 104 et suiv.; 1881.

Démonstration. — Posons

$$\alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_{i-1}}}} = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}},$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_{i-1} + \frac{1}{\alpha_i}}}} = \frac{p_i}{q_i},$$

alors on aura

$$\sqrt{R} = \frac{p_i y_i + p_{i-1}}{q_i y_i + q_{i-1}},$$

ou

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y_i + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0.$$

D'où il suit que

$$\Lambda = p_i^2 - q_i^2 R,$$

$$B^2 - AC = (p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1})^2 R = R, \quad \text{c. q. f. d.}$$

THEOREME II. — Soit

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{y_i}}}}$$

ou y_i est l'une des racines de l'équation

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y_i + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0.$$

Si

$$p_i^2 - q_i^2 R = a,$$

a étant constant, pour i impair, nous aurons

$$a = 1.$$

Démonstration. — Des équations

$$p_i^2 - q_i^2 R = \alpha,$$

$$p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1} = (-1)^{i-1} = 1,$$

on déduit

$$q_i q_{i-1} R - p_i p_{i-1} = \frac{p_i - \alpha q_{i-1}}{q_i},$$

d'où il suit que

$$\frac{p_i - \alpha q_{i-1}}{q_i}$$

est une fonction entière. Mais, comme

$$\delta p_i > \delta q_i > \delta q_{i-1} \quad (1),$$

il est évident que αq_{i-1} est le reste de la division de p_i par q_i . Par conséquent,

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \frac{\alpha q_{i-1}}{q_i},$$

ou

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \frac{1}{\alpha^{-1} \frac{q_i}{q_{i-1}}}.$$

Mais

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i}}},$$

donc

$$\frac{\alpha^{-1} q_i}{q_{i-1}} = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots}},$$

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = \alpha_i + \frac{1}{\alpha^{-1} \alpha_2 + \frac{1}{\alpha \alpha_3 + \dots}},$$

D'après une propriété bien connue des fractions conti-

(1) δp_i est le degré de la fonction p_i (*Œuvres complètes*, t. I. p. 108 et suiv.).

nues, nous aurons (1)

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = \alpha_i + \frac{1}{\alpha_{i-1} + \frac{1}{\alpha_{i-2} + \dots + \frac{1}{\alpha_i}}}.$$

Donc

$$\alpha_i + \frac{1}{\alpha_{i-1} + \dots + \frac{1}{\alpha_1}} = \alpha \alpha_1 + \frac{1}{\alpha^{-1} \alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha^{-1} \alpha_i}}.$$

Cette égalité entraîne les suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha \alpha_1, \\ \alpha_{i-1} &= \alpha^{-1} \alpha_2, \\ \alpha_{i-2} &= \alpha \alpha_3, \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha_1 &= \alpha^{-1} \alpha_i. \end{aligned}$$

Si i est impair, en posant

$$i = 2k + 1,$$

nous aurons

$$\alpha_{i-k} = \alpha^{\pm 1} \alpha_{k+1},$$

ou

$$\alpha_{k+1} = \alpha^{\pm 1} \alpha_{k+1},$$

$$\alpha^{\pm 1} = 1,$$

et enfin

$$\alpha = 1.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME III. — Si, dans le développement de $\sqrt{R}$ en fraction continue, l'un des quotients complets y_i satisfait à l'équation

$$ay_i^2 + 2by_i + c = 0,$$

où

$$a = \pm (p_i^2 - q_i^2 R)$$

est une quantité constante, la fraction continue est nécessairement périodique.

(1) SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 30; 1866.

Démonstration. — Étant donné

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{y_i}}}}$$

De l'équation

$$\alpha y_i^2 + 2b y_i + c = 0,$$

nous tirerons

$$y_i = \frac{-b + \sqrt{R}}{a},$$

$$y_i = \frac{-b + \alpha + \frac{1}{y}}{a},$$

et, en posant,

$$\frac{-b + \alpha}{a} = \beta,$$

nous aurons

$$y_i = \beta + \frac{1}{ay}.$$

Cela posé, distinguons, avec Abel, deux cas.

Premier cas. — Le nombre $i = 2k + 1$, k étant entier. Dans ce cas

$$a = 1,$$

donc

$$y_i = \beta + \frac{1}{y},$$

donc la fraction continue

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots}}}}}}$$

est évidemment périodique. En outre, nous avons vu

que pour i impair

$$\alpha_{i-m} = \alpha_{m+1}.$$

En posant successivement

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots, (k-1), k,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \alpha_1, \\ \alpha_{i-1} &= \alpha_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha_{k+2} &= \alpha_k.\end{aligned}$$

Par conséquent les quotients incomplets de la fraction continue formeront la série suivante

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \alpha_k, \dots, \alpha_2, \alpha_1, \beta, \dots$$

Deuxième cas. — Posons

$$i = 2k.$$

Nous avons

$$y_i = \beta + \frac{1}{\alpha y}.$$

Mais

$$y = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{y_i}}}},$$

donc

$$\alpha y = \alpha \alpha_1 + \frac{1}{\alpha^{-1} \alpha_2 + \frac{1}{\alpha \alpha_3 + \dots + \frac{1}{\alpha^{-1} \alpha_i + \frac{1}{\alpha y_i}}}}$$

ou

$$\alpha y = \alpha \alpha_1 + \frac{1}{\alpha^{-1} \alpha_2 + \frac{1}{\alpha \alpha_3 + \dots + \frac{1}{\alpha^{-1} \alpha_i + \frac{1}{\alpha \beta + \frac{1}{y}}}}},$$

et par conséquent

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \alpha_i + \frac{1}{\beta + \frac{1}{a\alpha_1 + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \frac{1}{a\alpha_3 + \dots + \frac{1}{a^{-1}\alpha_i + \frac{1}{a\beta + \frac{1}{\alpha_1 + \dots}}}}}}}}}}$$

Il suit de là que les quotients incomplets forment la série

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \beta, \\ a\alpha_1, a^{-1}\alpha_2, a\alpha_3, \dots, a^{-1}\alpha_i, a\beta, \alpha_1, \dots$$

La période se compose des nombres suivants

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \beta, a\alpha_1, a^{-1}\alpha_2, \dots, a^{-1}\alpha_i, a\beta.$$

Ainsi, dans les deux cas, $\sqrt{R}$ se développe en fraction continue périodique. C. Q. F. D.