NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CARVALLO

Démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10 (1891), p. 109-110

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__109_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS;

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

THÉORÈME. — *Toute équation entière* $f(z) = 0$ *a une racine.*

M. Amigues a donné récemment une démonstration habile de ce théorème (¹). Dans le fond, la méthode est celle de Cauchy; l'intérêt de la nouvelle démonstration est d'être purement algébrique et de ne pas introduire la Trigonométrie. Dans une voie opposée, il importe de rechercher la forme la plus simple pour les élèves. Je propose la suivante.

La fonction $[\mathrm{mod} f(z)]^2$ est toujours positive; elle est finie et continue pour les valeurs finies de z et croît indéfiniment avec z : donc elle a au moins un minimum. Je dis que, pour ce minimum, on a $f(z) = 0$. Pour cela, il suffit de prouver que ce minimum n'est pas atteint tant que $f(z)$ n'est pas nul. C'est sur ce dernier point que porte la simplification que je propose.

Soit $z = x + yi$ une valeur qui n'annule pas $f(z)$, $z_1 = x - yi$ l'imaginaire conjuguée de z, f_1 la fonction conjuguée de f, c'est-à-dire celle que l'on déduit du polynôme f en remplaçant tous les coefficients par leurs conjugués; $f_1(z_1)$ sera l'imaginaire conjuguée de $f(z)$. On aura donc

$$[\mathrm{mod} f(z)]^2 = f(z) f_1(z_1) = \mathrm{F}(z, z_1).$$

(¹) *Comptes rendus*, t. CXII; 26 janvier 1891.

Je donne à z un accroissement ζ; z_1 prend l'accroissement conjugué ζ_1. L'accroissement de F sera donné par la formule de Taylor à deux variables

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(z+\zeta, z_1+\zeta_1) - F(z, z_1)\\ &= \sum \frac{1}{n!}\left(\zeta\frac{\partial}{\partial z} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^n F\\ &= \sum \frac{1}{n!}\left[\zeta^n f^n(z) f_1(z_1) + \ldots + \zeta_1^n f_1^n(z_1) f(z)\right].\end{aligned}$$

Dans ce développement, soit $f^n(z)$ la première dérivée de $f(z)$ qui ne s'annule pas; $f_1^n(z_1)$ sera la première dérivée de $f_1(z_1)$ qui ne s'annule pas. Dès lors, tous les termes qui précèdent le terme de rang n sont nuls; de plus, celui-ci se réduit à la somme des deux termes extrêmes du crochet, savoir $\zeta^n f^n(z) f_1(z_1) + \zeta_1^n f_1^n(z_1) f(z)$; c'est la somme de deux imaginaires conjuguées. Soient (ρ, ω), (a, α), (b, β) les modules et les arguments de ζ, $f^n(z)$ et $f_1(z_1)$. Le premier terme $\zeta^n f^n(z) f_1(z_1)$ aura pour module $\rho^n ab$ et pour argument $n\omega + \alpha + \beta$. Dans la somme de ce terme avec son conjugué, les parties imaginaires se détruisent et les parties réelles se doublent pour donner $2\rho^n ab\cos(n\omega + \alpha + \beta)$. On a donc

$$\Delta F = \frac{2\rho^n ab}{n!}\cos(n\omega + \alpha + \beta) + \ldots.$$

Dans cette somme, on peut disposer de ω, de façon que l'on ait $\cos(n\omega + \alpha + \beta) = -1$; puis on pourra prendre ρ assez petit pour que le premier terme donne son signe à la somme, c'est-à-dire le signe (—). L'accroissement ΔF est alors négatif. Donc la valeur considérée de $[\mathrm{mod} f(z)]^2$, différente de zéro, n'est pas un minimum. C. Q. F. D.