

MAURICE D'OCAGNE

Sur les séries récurrentes

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 93-97

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__93_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES SÉRIES RÉCURRENTES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. J'ai démontré dans ma *Théorie élémentaire des séries récurrentes* (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 65) que le terme général U_n d'une série récurrente, définie par les valeurs des p premiers termes U_0, U_1, \dots, U_{p-1} et par l'échelle de récurrence

$$U_n = a_1 U_{n-1} + a_2 U_{n-2} + \dots + a_p U_{n-p},$$

pouvait s'exprimer en fonction linéaire de p termes consécutifs de la série *fondamentale* correspondante, définie par la même échelle de récurrence

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_p u_{n-p},$$

avec les valeurs initiales

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad \dots, \quad u_{p-2} = 0, \quad u_{p-1} = 1 \quad (^1).$$

En raison de l'importance de ce résultat, que j'ai eu

(¹) *Loc. cit.*, p. 80.

occasion d'appliquer assez souvent depuis sa publication, je crois devoir y revenir ici à la fois pour l'établir d'une manière plus simple et le compléter, car mon premier Mémoire ne contenait pas la forme des coefficients de l'expression obtenue (*).

Écrivons donc les $n - p + 1$ égalités consécutives

$$\begin{aligned}
U_p &= a_1 U_{p-1} + a_2 U_{p-2} + \dots + a_p U_0, \\
U_{p+1} &= a_1 U_p + a_2 U_{p-1} + \dots + a_p U_1, \\
\dots\dots\dots \\
U_{n-1} &= a_1 U_{n-2} + a_2 U_{n-3} + \dots + a_p U_{n-p-1}, \\
U_n &= a_1 U_{n-1} + a_2 U_{n-2} + \dots + a_p U_{n-p}.
\end{aligned}$$

Multiplions la première par u_{n-1} , la deuxième par u_{n-2} , ..., l'avant-dernière par u_p , la dernière par u_{p-1} , et faisons la somme en tenant compte des égalités qui définissent la série (u). Il vient alors

$$\begin{aligned}
U_n &= U_{p-1} u_n + U_{p-2} (u_{n+1} - a_1 u_n) + \dots \\
&+ U_1 (u_{n+p-2} - a_1 u_{n+p-3} - \dots - a_{p-2} u_n) \\
&- U_0 (u_{n+p-1} - a_1 u_{n+p-2} - a_2 u_{n+p-3} - \dots - a_{p-1} u_n)
\end{aligned}$$

ou

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned}
U_n &= U_0 u_{n+p-1} + (U_1 - a_1 U_0) u_{n+p-2} + \dots \\
&- (U_{p-2} - a_1 U_{p-3} - \dots - a_{p-2} U_0) u_{n+1} \\
&- (U_{p-1} - a_1 U_{p-2} - \dots - a_{p-1} U_0) u_n.
\end{aligned} \right.$$

Telle est la formule que nous avions en vue.

Pour en faire saisir toute l'importance, nous allons l'appliquer à un exemple qui se trouve dans notre premier Mémoire (n° 12), mais sans que le calcul soit achevé, et l'on va voir que la forme du résultat est intéressante.

(*) A la vérité, il était facile d'achever le calcul que j'indiquais alors. Le résultat que je donne ici était donc implicitement contenu dans le Mémoire en question. Je n'en crois pas moins devoir le donner explicitement, surtout à cause de l'application qui suit.

2. Le problème dont il s'agit est le suivant :

Trouver (lorsqu'elle existe) la somme S de la série

$$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots + \text{ad inf.},$$

en fonction de $U_0, U_1, \dots, U_{p-1}, a_1, a_2, \dots, a_p$ qui sont les données de la question.

Voyons d'abord comment la formule de Lagrange s'appliquerait à ce problème. Lagrange a démontré que

$$(2) \quad U_n = \alpha_1 \rho_1^n + \alpha_2 \rho_2^n + \dots + \alpha_p \rho_p^n.$$

$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ étant les racines supposées inégales de l'équation (dite *génératrice*)

$$\varphi(x) = x^p - a_1 x^{p-1} - a_2 x^{p-2} - \dots - a_p = 0$$

et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des coefficients qui se déterminent en faisant successivement dans (2) $n = 0, 1, 2, \dots, p-1$, ce qui donne les p équations linéaires

$$(3) \quad U_i = \alpha_1 \rho_1^i + \alpha_2 \rho_2^i + \dots + \alpha_p \rho_p^i \quad (i = 0, 1, \dots, p-1).$$

La formule (2) donne

$$\sum_{v=0}^{v=n} U_v = \alpha_1 \frac{\rho_1^{n+1} - 1}{\rho_1 - 1} + \alpha_2 \frac{\rho_2^{n+1} - 1}{\rho_2 - 1} + \dots + \alpha_p \frac{\rho_p^{n+1} - 1}{\rho_p - 1}.$$

Si donc, toutes les racines $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ ont un module inférieur à l'unité, on a, à la limite, lorsque n croît indéfiniment,

$$S = \frac{\alpha_1}{1 - \rho_1} + \frac{\alpha_2}{1 - \rho_2} + \dots + \frac{\alpha_p}{1 - \rho_p},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ayant les valeurs qui résultent du système d'équations (3). On tombe ainsi sur une fonction symétrique des racines de l'équation génératrice d'une forme

tellement compliquée qu'il est à peu près inutile de chercher à en calculer la valeur au moyen des coefficients de cette équation.

3. Nous allons faire voir maintenant comment notre formule (1) donne directement cette expression.

Rappelons d'abord le résultat suivant démontré dans notre Mémoire de 1884 (n° 10).

En représentant par $(\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(n)}$ ce que devient le développement de $(\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_p)^n$ lorsqu'on y remplace tous les coefficients par l'unité, nous avons fait voir que

$$u_n = (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(n-p+1)}.$$

Partant de là et nous appuyant sur les formules (3) et (4) de notre Mémoire, qui donnent

$$\begin{aligned} & (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(0)} + (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(1)} + \dots + (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(n-p+1)} \\ &= (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(n-p+1)}, \end{aligned}$$

et, en posant $\psi(x) = (x-1)\varphi(x)$,

$$\begin{aligned} & (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(n-p+1)} \\ &= \frac{\rho_1^{n+1}}{\psi'(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{n+1}}{\psi'(\rho_2)} + \dots + \frac{\rho_p^{n+1}}{\psi'(\rho_p)} + \frac{1}{\psi'(1)}, \end{aligned}$$

nous avons obtenu la formule

$$\sum_{i=p-1}^{i=n} u_n = \frac{1}{\psi'(1)} + \sum_{h=1}^{h=p} \frac{\rho_h^{n+1}}{\psi'(\rho_h)};$$

d'où, à la limite, en supposant les modules de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ inférieurs à 1,

$$(4) \quad s = \frac{1}{\psi'(1)} = \frac{1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p)}.$$

