

C.-A. LAISANT

Remarques au sujet du théorème de Carnot

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 5-20

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

REMARQUES AU SUJET DU THÉORÈME DE CARNOT;

PAR M. C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences.

PROPOSITIONS DIRECTES.

1. Le théorème de Carnot, relatif aux segments déterminés sur les côtés d'un polygone fermé par les intersections avec une conique, ou plus généralement avec une courbe algébrique plane d'ordre quelconque, me semble pouvoir être démontré d'une façon simple, à l'aide d'un petit nombre de remarques destinées surtout à abrégé le langage et l'écriture. Par ce procédé, on arrive aisément à une généralisation, concernant l'espace, qui est peut-être nouvelle et qu'en tous cas je n'ai trouvée nulle part. Enfin, on peut établir une série de propositions corrélatives, aussi bien pour le plan que pour l'espace.

2. Considérons un segment AB , limité aux extrémités A et B , et tracé dans un plan qui contient une courbe (Γ) d'ordre n . La droite AB indéfiniment prolongée coupe la courbe en n points P_1, P_2, \dots, P_n , réels ou imaginaires. Supposons-les d'abord tous réels et formons les

rappports

$$\frac{P_1 B}{P_1 A}, \quad \frac{P_2 B}{P_2 A}, \quad \dots, \quad \frac{P_n B}{P_n A},$$

considérés en grandeurs et en signes.

Le produit de tous ces rapports sera ce que nous appellerons la *puissance du segment AB par rapport à la courbe* (Γ). Nous le désignerons par la notation $\mathfrak{P}_\Gamma(AB)$ et nous écrirons ainsi

$$(1) \quad \mathfrak{P}_\Gamma(AB) = \frac{P_1 B \cdot P_2 B \dots P_n B}{P_1 A \cdot P_2 A \dots P_n A}.$$

Par suite de cette définition, il est évident que les quantités $\mathfrak{P}_\Gamma(AB)$ et $\mathfrak{P}_\Gamma(BA)$ sont inverses, puisqu'il suffit de permuter les deux lettres A, B, c'est-à-dire qu'on a

$$(2) \quad \mathfrak{P}_\Gamma(AB) \cdot \mathfrak{P}_\Gamma(BA) = 1.$$

3. Même lorsque les points d'intersection P_1, P_2, \dots, P_n sont en partie ou en totalité imaginaires, la puissance $\mathfrak{P}_\Gamma(AB)$ n'en est pas moins réelle.

Pour le démontrer, supposons qu'on ait rapporté la courbe (Γ) à un triangle de référence ABC, C étant un point quelconque, et que son équation, en coordonnées barycentriques, soit

$$(3) \quad ax^n + b\beta^n + c\gamma^n + \dots = 0.$$

Pour obtenir les points P_1, P_2, \dots , il faut, dans cette équation, faire $\gamma = 0$, ce qui donne une équation homogène en α et β :

$$(4) \quad ax^n + \dots + b\beta^n = 0.$$

Si l'on prend un point P_k quelconque parmi eux, et si ses coordonnées sont $\alpha_k, \beta_k, 0$, on aura

$$\frac{P_k B}{AP_k} = \frac{\alpha_k}{\beta_k} \quad \text{ou} \quad \frac{P_k B}{P_k A} = (-1) \frac{\alpha_k}{\beta_k},$$

Multipliant toutes ces égalités, en tenant compte de la formule (2), il nous reste

$$(9) \quad \mathcal{P}(AB) \mathcal{P}(BC) \dots \mathcal{P}(LA) = 1,$$

formule qui exprime le théorème de Carnot pour un polygone plan quelconque.

6. Imaginons actuellement une surface algébrique (Σ) d'ordre n , et un segment AB qui, indéfiniment prolongé, coupe la surface (Σ) en n points. Nous définirons comme ci-dessus la puissance du segment par rapport à la surface (Σ), et il suffira, pour l'obtenir, de considérer la section de la surface par un plan quelconque passant par AB et de prendre la puissance de AB par rapport à cette courbe de section.

Si ABC...LA est un polygone gauche fermé quelconque, et si nous prenons un point O arbitraire dans l'espace, les triangles OAB, OBC, ..., OLA détermineront autant de plans qui couperont la surface (Σ) suivant des courbes de même ordre; et nous pourrions conséquemment écrire encore identiquement comme ci-dessus les équations (8), les puissances des segments étant ici prises par rapport à une surface au lieu de l'être par rapport à une courbe plane. Nous en déduirons la formule (9), c'est-à-dire que *le théorème de Carnot s'applique à un polygone fermé gauche et à une surface algébrique quelconque.*

7. Le théorème de Carnot, soit dans le plan, soit dans l'espace, conduit à un nombre considérable d'applications et à des remarques assez curieuses au sujet des conditions déterminantes d'une courbe algébrique, et auxquelles il convient de s'arrêter un instant.

Tout d'abord, si on l'applique à une droite et à un

triangle, on a le théorème des transversales, et la proposition réciproque est vraie; c'est-à-dire que, si trois points sur les côtés d'un triangle satisfont à l'identité exprimée par le théorème de Carnot, ces trois points sont en ligne droite. Il en est de même pour six points (deux sur chaque côté d'un triangle). S'ils satisfont à l'identité de Carnot, ils sont situés sur une conique. Cette réciprocity tient à ce que le nombre des points considérés est précisément, dans ces deux cas, supérieur d'une unité à celui des points nécessaires pour la détermination de la ligne, savoir : 2 pour la droite, 5 pour la conique.

Il est intéressant de constater que ce sont même les deux seuls cas où le fait se produise, et où, par conséquent, la réciproque du théorème de Carnot soit vraie. Soit, en effet, une courbe d'ordre n , coupant les côtés d'un polygone de p côtés. Le nombre des points déterminants de la courbe est $\frac{n(n+3)}{2}$; celui des points de section est pn . Il faut donc qu'on ait

$$pn = \frac{n(n+3)}{2} - 1, \quad p = \frac{n^2 - 3n + 3}{2n}.$$

Comme p doit être entier, le numérateur doit être divisible par n . On ne peut donc avoir que $n = 1$ (droite) ou $n = 2$ (conique). Dans les deux cas, il en résulte $p = 3$ (triangle).

Par contre, le théorème de Carnot nous montre que les points qui déterminent une courbe ne peuvent pas toujours être pris arbitrairement, même lorsqu'ils sont en nombre inférieur à celui des conditions déterminantes. Ainsi une cubique se détermine par neuf points; et cependant, si nous prenons sur les côtés AB, BC, CA d'un triangle deux groupes de trois points P_1, P_2, P_3 ,

M_1, M_2, M_3 , et deux points N_1, N_2 , ce qui fait huit points, le troisième point N_3 , où la courbe coupe le côté CA , sera complètement déterminé par le théorème de Carnot. Ainsi huit points seulement auront pu être choisis arbitrairement, dans les conditions indiquées.

Autre exemple : une courbe du sixième ordre coupe en dix-huit points les trois côtés d'un triangle. On ne peut donner arbitrairement que dix-sept de ces points, en vertu du théorème de Carnot; et cependant il faut vingt-sept points pour déterminer, en général, une courbe du sixième ordre. On voit combien les conditions géométriques imposées apportent de modifications.

Dans l'espace, il en est encore de même. Comme unique exemple, appliquons la proposition du n° 6 à une surface du second ordre coupant les côtés d'un quadrilatère gauche en huit points; lorsqu'on se sera donné sept de ces points, le huitième sera entièrement déterminé, bien qu'il faille neuf points, en général, pour la détermination de la surface.

Par analogie avec ce qui a été dit plus haut, cherchons les cas dans lesquels la proposition réciproque du théorème de Carnot est applicable dans l'espace. Le nombre des points nécessaires pour la détermination d'une surface du $n^{\text{ième}}$ ordre est

$$N = \frac{n}{6} (n^2 + 6n + 11).$$

Si donc une telle surface rencontre les côtés d'un polygone gauche quelconque de p côtés, ce qui fait pn points d'intersection, nous devons avoir $pn = N + 1$; en effet, si les pn points donnés satisfont à l'identité de Carnot, comme on peut en prendre arbitrairement $pn - 1 = N$ et qu'ils suffisent à la détermination de la surface, le $(N + 1)^{\text{ième}}$ sera donc aussi sur cette surface.

Or, en résolvant en nombres entiers l'équation indéterminée

$$pn = \frac{n}{6}(n^2 + 6n + 11) + 1,$$

on trouve très facilement qu'elle n'admet que les solutions

$$\begin{aligned} n = 1, & \quad p = 4, \\ n = 2, & \quad p = 5, \\ n = 6, & \quad p = 14. \end{aligned}$$

Ainsi, dans l'espace, la réciproque du théorème de Carnot s'applique :

- 1° A un quadrilatère gauche coupant un plan ;
- 2° A un pentagone coupant une surface du second ordre ;
- 3° A un polygone de 14 côtés coupant une surface du sixième ordre.

Pour plus de clarté, nous énoncerons explicitement cette réciproque dans ce dernier cas :

Si l'on donne 6 points sur chaque côté d'un polygone gauche de 14 côtés ABC...L, et si l'on forme les puissances

$$\begin{aligned} \frac{P_1B}{P_1A} \cdots \frac{P_6B}{P_6A} &= \alpha_1, \\ \frac{Q_1C}{Q_1B} \cdots \frac{Q_6C}{Q_6B} &= \alpha_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{S_1A}{S_1L} \cdots \frac{S_6A}{S_6L} &= \alpha_{14} \end{aligned}$$

au moyen de ces points; si, en outre, le produit

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{14}$$

est égal à l'unité, les 84 points considérés sont sur une même surface du sixième ordre.

8. Nous limiterons, pour abrégér, les applications du théorème de Carnot à un très petit nombre d'exemples. Supposons une courbe plane d'ordre n coupant un triangle en $3n$ points; si n est impair et égal à $2n' + 1$ et si n' groupes de 6 points (2 par chaque côté) sont situés sur n' coniques, les trois points restants seront en ligne droite.

Si n est pair et égal à $2(n' + 1)$ et si n' groupes de 6 points (2 par chaque côté) sont situés sur n' coniques, les six points restants sont aussi sur une même conique.

Ces deux propositions se déduisent immédiatement de l'identité de Carnot, en ayant soin de se rappeler que, pour les coniques et les droites, la réciproque est applicable.

Dans le cas où l'on remplace la courbe par un système de trois droites $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$, la première de ces deux propositions nous montre que, si B_1 , C_1 , C_2 , A_2 , A_3 , B_3 sont situées sur une même conique, les trois points A_1 , B_2 , C_3 sont en ligne droite. C'est la propriété de l'*hexagone de Pascal*, qui s'obtient ainsi comme un simple corollaire du théorème de Carnot.

On a, en effet,

$$\frac{A_1 C}{A_1 B} \frac{B_1 A}{B_1 C} \frac{C_1 B}{C_1 A} = 1,$$

$$\frac{A_2 C}{A_2 B} \frac{B_2 A}{B_2 C} \frac{C_2 B}{C_2 A} = 1,$$

$$\frac{A_3 C}{A_3 B} \frac{B_3 A}{B_3 C} \frac{C_3 B}{C_3 A} = 1$$

et, en outre,

$$\frac{B_1 A}{B_1 C} \frac{B_3 A}{B_3 C} \frac{C_1 B}{C_1 A} \frac{C_2 B}{C_2 A} \frac{A_2 C}{A_2 B} \frac{A_3 C}{A_3 B} = 1.$$

Multipliant entre elles les trois premières égalités et

divisant par la quatrième, il reste

$$\frac{A_1 C}{A_1 B} \frac{B_2 A}{B_2 C} \frac{C_3 B}{C_3 A} = 1,$$

ce qui montre bien que les trois points A_1, B_2, C_3 sont en ligne droite, en vertu de la proposition réciproque.

PROPOSITIONS CORRÉLATIVES.

9. Considérons un angle ACB dans un plan qui contient une courbe T de classe n . Par le sommet C on peut mener à la courbe n tangentes CP_1, CP_2, \dots, CP_n , réelles ou imaginaires. Dans le cas où elles sont toutes réelles, formons, pour chacune d'elles, le rapport

$$\frac{\sin(BCP_k)}{\sin(P_k CA)},$$

dans lequel nous tiendrons compte du signe, d'après les conventions habituelles sur les angles. Le produit

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}_\Gamma(ACB) \\ \text{ou} \\ \mathcal{Q}_\Gamma(\widehat{A, B}) = \frac{\sin(BCP_1)}{\sin(P_1 CA)} \frac{\sin(BCP_2)}{\sin(P_2 CA)} \dots \frac{\sin(BCP_n)}{\sin(P_n CA)} \end{array} \right.$$

sera appelé *puissance de l'angle ACB par rapport à la courbe Γ* .

Par définition même, il est clair qu'on a

$$(2') \quad \mathcal{Q}_\Gamma(\widehat{A, B}) \mathcal{Q}_\Gamma(\widehat{B, A}) = 1.$$

Dans ces formules, les lettres A, B peuvent être imaginées comme représentant les côtés mêmes de l'angle ACB .

10. Lorsque les tangentes CP_1, CP_2, \dots, CP_n , ou quelques-unes d'entre elles, sont imaginaires, la puis-

sance $\mathcal{Q}_\Gamma(\widehat{A}, \widehat{B})$ n'en reste pas moins réelle. Nous le démontrerons d'une façon tout à fait analogue à celle employée plus haut, en supposant l'équation de la courbe écrite en coordonnées tangentielles sous la forme

$$(3') \quad au^n + bv^n + cw^n + \dots = 0,$$

les coordonnées u, v, w d'une droite étant, par exemple, dans le système considéré, proportionnelles aux distances AA', BB', CC' de cette droite aux trois sommets du triangle de référence. Si alors une droite $CP(u, v, 0)$ passe par le point C, on aura

$$\frac{u}{v} = \frac{AC \sin(ACP)}{BC \sin(BCP)} = \frac{q \sin(ACP)}{p \sin(BCP)}$$

et

$$\frac{\sin(BCP)}{\sin(PCA)} = \frac{q}{p} (-1) \frac{c}{u},$$

p, q, r représentant les longueurs des côtés BC, CA, AB du triangle de référence.

Or, si nous voulons obtenir les tangentes à la courbe (Γ) menées par C, il faut faire $w = 0$ dans l'équation $(3')$ ci-dessus, ce qui donne une relation de la forme

$$(4') \quad au^{n-1} + \dots + bv^n = 0$$

ou

$$(5') \quad b \left(\frac{c}{u} \right)^n + \dots - a = 0.$$

Le produit de toutes les racines de cette équation est $(-1)^n \frac{a}{b}$. Mais, d'après ce que nous venons de voir, ce produit sera aussi

$$(-1)^n \frac{p^n}{q^n} \mathcal{Q}_\Gamma(ACB).$$

d'où, par multiplication, et en vertu de la relation (2'),

$$(9') \quad \mathfrak{Q}(\widehat{A, B}) \mathfrak{Q}(\widehat{B, C}) \dots \mathfrak{Q}(\widehat{L, A}) = 1,$$

formule qui démontre la proposition dont il s'agit.

13. Pour essayer d'étendre à l'espace les propositions corrélatives, il est tout d'abord nécessaire d'introduire une nouvelle notion, tout à fait analogue à celle du n° 9 : celle de la *puissance d'un dièdre par rapport à un point, ou en général par rapport à une surface de classe n*.

Un dièdre étant formé par deux plans A, B, et P étant un plan arbitraire conduit par l'arête du dièdre, le rap-

port $\frac{\sin(\widehat{B, P})}{\sin(\widehat{P, B})}$ sera dit *puissance du dièdre par rapport*

à un point quelconque du plan P.

Si par l'arête on mène les plans tangents P_1, P_2, \dots, P_n à la surface (Σ) de classe n , le produit

$$(10) \quad \frac{\sin(\widehat{B, P_1})}{\sin(\widehat{P_1, A})} \frac{\sin(\widehat{B, P_2})}{\sin(\widehat{P_2, A})} \dots \frac{\sin(\widehat{B, P_n})}{\sin(\widehat{P_n, A})} = \mathfrak{Q}_{\Sigma}(\widehat{A, B})$$

sera la puissance du même dièdre par rapport à la surface (Σ).

14. Soit CD l'arête du dièdre que nous avons considéré ci-dessus. Prenons deux points quelconques C, D sur cette arête, deux points A, B dans les plans A, B, respectivement, et supposons que, ABCD étant choisi comme tétraèdre de référence, nous adoptons un système de coordonnées tétraédrales tangentiellles, où les coordonnées u, v, w, t d'un plan soient proportionnelles aux distances de ce plan aux quatre sommets A, B, C, D, en grandeurs et en signes.

(17)

Si nous conduisons un plan $P(u, v, 0, 0)$ par CD , il est extrêmement facile de voir que nous aurons

$$\frac{u}{v} = \frac{(ACD)}{(BCD)} \frac{\sin(A, P)}{\sin(B, P)},$$

(ACD) , (BCD) représentant les aires des triangles, ou

$$\frac{\sin(\widehat{B, P})}{\sin(\widehat{P, A})} = \frac{(ACD)}{(BCD)} (-1) \frac{v}{u}.$$

En prenant l'équation d'une surface (Σ) sous la forme

$$au^n + bv^n + cw^n + dt^n + \dots = 0,$$

un calcul tout à fait analogue à celui du n° 10, et dans lequel nous ferons d'abord $t = 0$, $w = 0$, puis $t = 0$, $u = 0$, puis $t = 0$, $v = 0$, nous permettra, sans qu'il soit besoin d'entrer dans de plus grands détails, de démontrer cette proposition :

Le produit des puissances des trois dièdres DA , DB , DC d'un trièdre $DABC$, par rapport à la surface (Σ) de classe n , est égal à l'unité.

Il est à peine nécessaire de remarquer que les plans ADB , BDC , CDA du dièdre doivent être pris dans leur ordre successif, et que, d'une manière générale,

$$\mathcal{Q}_{\Sigma}(\widehat{M, N})\mathcal{Q}_{\Sigma}(\widehat{N, M}) = 1, \quad .$$

M , N représentant deux plans quelconques.

15. Soit un polygone gauche fermé, dont les côtés sont A , B , C , \dots , L . Un côté quelconque B , par exemple, forme un plan avec le côté C qui le suit, et un autre avec le côté A qui le précède. Si nous prenons un troisième plan arbitraire Q , nous aurons donc un

Les conditions de réciprocité sont les mêmes que celles étudiées au n° 7, c'est-à-dire qu'elles se limitent aux points et aux coniques, par rapport au triangle.

Pour reprendre un exemple analogue à l'un de ceux indiqués plus haut, à une courbe de la sixième classe on peut mener par les trois sommets d'un triangle dix-huit tangentes, dont dix-sept seulement sont arbitraires, bien qu'il faille, en général, vingt-sept tangentes pour déterminer une telle courbe.

Dans l'espace, par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, on pourra mener huit plans tangents à une surface du second degré; et sept seulement de ces plans seront arbitraires.

D'une façon générale, la réciproque du théorème corrélatif s'applique aux plans tangents menés :

- 1° A un point, par les côtés d'un quadrilatère gauche;
- 2° A une surface du second degré, par les côtés d'un pentagone;
- 3° A une surface de la sixième classe, par les côtés d'un polygone de quatorze côtés.

17. Soit une courbe plane de classe n , à laquelle on peut mener $3n$ tangentes par les sommets d'un triangle: si $n = 2n' + 1$ et si n' groupes de six tangentes (deux issues de chaque sommet) sont tangentes à n' coniques, les trois tangentes qui restent se couperont en un même point.

Si $n = 2(n' + 1)$ et si n' groupes de six tangentes (deux issues de chaque sommet) sont tangentes à n' coniques, les six tangentes qui restent sont tangentes à une même conique.

Si nous remplaçons la courbe de classe n par un sys-

tème de trois points A' , B' , C' , nous arrivons au corollaire que voici :

Si les six droites $A'B$, $A'C$, $B'C$, $B'A$, $C'A$, $C'B$ sont tangentes à une même conique, les trois droites AA' , BB' , CC' se rencontrent en un même point.

On reconnaît la propriété de l'*hexagone de Brianchon*.

Il nous suffit de ces indications pour montrer tout le parti qu'il est possible de tirer du théorème de Carnot, et toute l'extension à laquelle se prête cette proposition remarquable.