DE SAINT-GERMAIN

Note sur le problème de mécanique proposé au concours d'agrégation en 1890

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 546-552

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__546_0>

NOTE SUR LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1890.

(Extrait d'une lettre de M. DE SAINT-GERMAIN à M. ROUCHÉ).

Je vais encore indiquer, pour quelques lecteurs des *Nouvelles Annales,* une solution du problème de Mécanique proposé en 1890 au concours d'agrégation des Sciences mathématiques : la question est classique ; les calculs seuls exigent un peu d'attention.

Il s'agit, en premier lieu, de trouver la grandeur et la direction des axes de l'ellipsoïde d'inertie P, relatif au centre de gravité G d'un tétraèdre homogène OABC dont le trièdre en O est trirectangle, et où l'on a

$$\mathrm{OA} = a = \sqrt{2}, \qquad \mathrm{OB} = b = 1, \qquad \mathrm{OC} = c = \sqrt{3};$$

on propose ensuite de déterminer le mouvement du tétraèdre, en supposant qu'il ne soit pas pesant et que son mouvement initial se réduise à une rotation dont l'axe passe au point G et dont les composantes, suivant l'axe majeur, l'axe moyen et l'axe mineur de P, soient

$$p_0 = \sqrt{6+\sqrt{5}}, \qquad q_0 = 0, \qquad r_0 = \sqrt{6-\sqrt{5}}.$$

1° Soient ε la densité du tétraèdre, m sa masse. Prenons d'abord les droites OA, OB, OC pour axes des x, des y, des z et cherchons les intégrales de la forme

$$\mathrm{U} = \iiint \varepsilon x^2\, dx\, dy\, dz, \qquad \mathrm{V} = \iiint \varepsilon yz\, dx\, dy\, dz,$$

étendues à tout le volume du tétraèdre : un calcul très simple, que des considérations géométriques peuvent encore abréger, donne

$$U = \frac{a^3 bc\varepsilon}{60} = \frac{ma^2}{10}, \qquad V = \frac{ab^2c^2\varepsilon}{120} = \frac{mbc}{20}:$$

ces résultats se déduiraient immédiatement de la formule, bonne à retenir,

$$\iiint x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}\,dx\,dy\,dz = a^p b^q c^r \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)},$$

l'intégrale s'étendant à la partie de l'espace où x, y, z sont positifs et satisfont à l'inégalité

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leqq 1.$$

Par le point G, dont les coordonnées sont $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}$, menons des axes Gx', Gy', Gz' parallèles aux premiers : l'équation de l'ellipsoïde central P sera de la forme

$$(1) \qquad \mathcal{A}x'^2 + \mathcal{B}y'^2 + \mathcal{C}z'^2 - 2\mathcal{D}y'z' - 2\mathcal{E}'z'x' - 2\mathcal{F}x'y' = 1,$$

et l'on a, d'après des théorèmes bien connus et d'après les valeurs des intégrales analogues à U et à V,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \sum (y'^2 + z'^2)\,dm \\ &= \sum (y^2 + z^2)\,dm - \frac{b^2+c^2}{16} m = 3\,\frac{b^2+c^2}{80} m,\\ \mathcal{D} &= \sum y'z'\,dm = \sum \left(y - \frac{b}{4}\right)\left(z - \frac{c}{4}\right) dm = -\frac{bcm}{80}.\end{aligned}$$

Avec les valeurs numériques attribuées à a, b, c, on a

$$\mathcal{A} = \frac{12m}{80}, \qquad \mathcal{B} = \frac{15m}{80}, \qquad \mathcal{C} = \frac{9m}{80},$$

$$\mathcal{D} = -\frac{m\sqrt{3}}{80}, \qquad \mathcal{E} = -\frac{m\sqrt{6}}{80}, \qquad \mathcal{F} = -\frac{m\sqrt{2}}{80}.$$

Rapporté à ses axes principaux $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$, P aurait pour équation

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

A, B, C étant égaux aux moments principaux d'inertie relatifs au point G, et aussi aux racines de l'équation en S pour la surface (1) : écrivons cette équation sous la forme, dite de Jacobi,

$$(2)\qquad \frac{1}{\mathcal{D}^2(S-\lambda)}+\frac{1}{\mathcal{E}^2(S-\mu)}+\frac{1}{\mathcal{F}^2(S-\nu)}+\frac{1}{\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F}}=0,$$

en posant

$$\lambda=\mathcal{A}+\frac{\mathcal{E}\mathcal{F}}{\mathcal{D}}=\frac{5m}{40},\qquad \mu=\ldots=\frac{7m}{40},\qquad \nu=\frac{3m}{40}.$$

Pour simplifier l'écriture, faisons $m=40$, puis, dans l'équation (2), remplaçons les lettres par leurs valeurs et réduisons : il vient

$$S^3-18S^2+103S-186=0;$$

on trouve que cette équation a pour racines 6 et $6\pm\sqrt{5}$. Nous poserons

$$A=6-\sqrt{5},\qquad B=6,\qquad C=6+\sqrt{5};$$

le moment d'inertie minimum A correspond à l'axe majeur $G\xi$ de P, B à l'axe moyen, C à l'axe mineur.

Les cosinus directeurs de ces axes sont, on le sait, proportionnels aux inverses de $\mathcal{D}(S-\lambda)$, $\mathcal{E}(S-\mu)$, $\mathcal{F}(S-\nu)$ en faisant S égal à A pour $G\xi$, à B pour $G\eta$, à C pour $G\zeta$: on trouve pour ces trois axes respectifs, après quelques réductions simples,

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)}=\frac{\beta}{\sqrt{5}-1}=\frac{\gamma}{-\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}=\frac{\pm1}{\sqrt{60+20\sqrt{5}}},$$

$$\frac{\alpha'}{\sqrt{6}}=\frac{\beta'}{-\sqrt{3}}=\gamma'=\frac{\pm1}{\sqrt{10}},$$

$$\frac{\alpha''}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}=\frac{\beta''}{\sqrt{5}+1}=\frac{\gamma''}{\sqrt{3}(3-\sqrt{5})}=\frac{\pm1}{\sqrt{60-20\sqrt{5}}}.$$

2° La recherche du mouvement du tétraèdre revient à celle du mouvement de l'ellipsoïde P qui lui est lié d'une manière fixe et connue, sinon simple. Le centre G reste immobile et P est animé d'un *mouvement de Poinsot*. Pour déterminer ce mouvement, on calcule d'abord, en fonction du temps, les composantes p, q, r de la rotation instantanée suivant $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$. A cet effet, j'associe la seconde équation d'Euler à celles qui expriment la conservation de la force vive et du couple résultant des quantités de mouvement : j'ai trois équations de la forme

$$Ap^2 + \ldots = H, \qquad A^2p^2 + \ldots = K^2, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B}pr,$$

qui, eu égard aux valeurs de A, B, C, p_0, q_0, r_0, deviennent

$$(6-\sqrt{5})p^2 + 6q^2 + (6+\sqrt{5})r^2 = 31 \times 2, \tag{3}$$

$$(6-\sqrt{5})^2p^2 + 36q^2 + (6+\sqrt{5})^2r^2 = 31 \times 12. \tag{4}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{3}pr. \tag{5}$$

L'élimination de q entre les équations (3) et (4) donne

$$\frac{r}{p} = \pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{5}}{6-\sqrt{5}}}; \tag{6}$$

le signe +, qui convient d'abord, doit être conservé jusqu'à ce que p et r s'annulent, ce qui, on le verra, ne se produira jamais. Le lieu de l'axe instantané dans le solide est un plan. On est dans le cas simple où la distance $\frac{\sqrt{H}}{K}$ du centre G au plan sur lequel P doit rouler est égale au demi-axe moyen de l'ellipsoïde. Des équations (3) et (6) on déduit

$$(7)\qquad p=\pm\sqrt{\frac{31-3q^2}{6-\sqrt{5}}},\qquad r=\pm\sqrt{\frac{31-3q^2}{6+\sqrt{5}}};$$

on prendra les signes + qui conviennent à l'état initial. L'équation (5) donne alors

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\sqrt{5}}{3}\,\frac{31-3q^2}{\sqrt{31}}$$

ou, en posant, pour abréger,

$$\sqrt{\frac{5}{3}}=n,\qquad \sqrt{31}=\omega\sqrt{3},$$

$$n\,dt=\frac{\omega\,dq}{\omega^2-q^2}.$$

Intégrons, en nous rappelant que q_0 est nul, et résolvons par rapport à q : il vient

$$q=\omega\,\frac{e^{2nt}-1}{e^{2nt}+1}=\omega\,\frac{e^{nt}-e^{-nt}}{e^{nt}+e^{-nt}};$$

les équations (7) donnent, après des réductions simples,

$$p=\frac{2\sqrt{6+\sqrt{5}}}{e^{nt}+e^{-nt}},\qquad r=\frac{2\sqrt{6-\sqrt{5}}}{e^{nt}+e^{-nt}}.$$

Rien de plus facile que de discuter les valeurs de p, q, r. L'axe de la rotation instantanée, d'abord égal à $\sqrt{31}$, tend, pour t infini, à devenir égal à ω ou à $\sqrt{\frac{31}{3}}$ et à prendre la direction de $G\eta$.

Reste à déterminer, pour chaque instant, la position de P par rapport à un système d'axes fixes $Gx_1y_1z_1$;

Gz_1 coïncide avec l'axe du couple K des quantités de mouvement, Gy_1 avec la position initiale de $G\eta$, Gx_1 forme avec Gy_1z_1 un trièdre superposable à $G\xi\eta\zeta$. La position de ce dernier trièdre par rapport à $Gx_1y_1z_1$ sera définie par les trois angles d'Euler ψ, θ, φ et il suffit de faire la figure pour voir qu'à l'instant initial on a

$$\psi = \frac{3\pi}{2}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta = \theta_0 = \operatorname{arc}\cos\sqrt{\frac{6+\sqrt{5}}{12}}.$$

Les angles θ et φ sont donnés par les équations bien connues

$$\cos\theta = \frac{Cr}{K} = \frac{\sqrt{6+\sqrt{5}}}{(e^{nt}+e^{-nt})\sqrt{3}},$$

$$\sin\theta\sin\varphi = \frac{Ap}{K} = \frac{\sqrt{6-\sqrt{5}}}{(e^{nt}+e^{-nt})\sqrt{3}},$$

$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{Bq}{K} = \frac{e^{nt}-e^{-nt}}{e^{nt}+e^{-nt}};$$

pour t infini, θ tend vers $\frac{\pi}{2}$, φ vers zéro ; à la limite, $G\zeta$ et $G\xi$ sont dans le plan Gx_1y_1 et $G\eta$ coïncide avec Gz_1 ou K.

La détermination de ψ exige une quadrature : on a

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta} \\ &= \frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}K = \frac{(e^{2nt}+e^{-2nt})\sqrt{93}}{3e^{2nt}-\sqrt{5}+3e^{-2nt}};\end{aligned}$$

l'équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{12\,ne^{2nt}}{\sqrt{31}\left[1+\frac{(6e^{2nt}-\sqrt{5})^2}{31}\right]}.$$

L'intégration introduit un arc tang, qu'on supposera compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ et dont la valeur initiale est θ_0 ; on aura

$$\psi = \omega t + \text{arc tang}\,\frac{6e^{2nt} - \sqrt{5}}{\sqrt{31}} + \frac{3\pi}{2} - \theta_0.$$

Il est sans doute inutile d'insister sur l'interprétation bien connue des résultats précédents, ni sur la recherche de l'herpolhodie, la polhodie étant une ellipse.