Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1890)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 530-532

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__530_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1890).

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites xOx', yOy', qui se coupent en un point O, et sur la première un point A, sur la seconde un point B. Une droite mobile rencontre xOx' en M et yOy' en N, et l'on suppose que la longueur MN est égale à la somme ou à la valeur absolue de la différence des longueurs AM et BN :

1° Démontrer qu'il y a deux séries de droites qui satisfont à cette condition. Trouver combien on peut faire passer de ces droites par un point donné P du plan. Construire ces droites et distinguer parmi ces droites celles pour lesquelles la longueur MN est la somme des longueurs AM et BN de celles pour lesquelles elle en est la différence;

2° Soit MN une droite appartenant à l'une des deux séries; démontrer que le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMN est une conique qui a un foyer au point O, et que l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle OMN est un cercle.

Mathématiques spéciales.

On donne un triangle ABC et un point P dans son plan :

1° Trouver le lieu des centres des coniques S inscrites dans le triangle ABC et qui sont vues du point P sous un angle donné ω;

2° Discuter ce lieu en supposant que le point P se déplace dans le plan du triangle;

3° Démontrer que, si l'angle donné ω est droit, toutes les coniques S sont aussi vues sous un angle droit d'un autre point P'. Montrer que, dans ce cas, si le point P se déplace, la droite PP' passe par un point fixe I, et que le produit IP.IP' est constant.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Théorie. — Définir ce qu'on entend par un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre.

Exposer la méthode d'intégration de Mayer.

Application. — Intégrer le système suivant

$$\begin{aligned} x_1 x_5 p_1 &+ (3x_1x_4 - 2x_1x_6 - 2x_3x_5)p_3 \\ &- (2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_4x_5 - 2x_5x_6)p_4 \\ &+ x_5^2 p_5 - (3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_4x_5 - 2x_5x_6)p_6 = 0 \end{aligned}$$

$$x_2p_2 - x_3p_3 + 2(x_4 - x_6)p_4 - x_5p_5 + 3(x_4 - x_6)p_6 = 0.$$

où l'on a posé

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Composition de Mécanique rationnelle.

On donne un tétraèdre non pesant OABC dans lequel l'angle trièdre O est trirectangle, et dont les arêtes OA, OB, OC ont respectivement pour longueurs a, b, c :

1° Déterminer les axes principaux de l'ellipsoïde central d'inertie, c'est-à-dire de l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité G du tétraèdre, dans l'hypothèse suivante

$$a = \sqrt{2}, \qquad b = \sqrt{1}, \qquad c = \sqrt{3};$$

2° On imprime au tétraèdre une rotation initiale autour d'un diamètre GD de l'ellipsoïde central, et l'on propose d'étudier le mouvement de ce tétraèdre autour de son centre de gravité G. On déterminera sa position dans l'espace à une époque quelconque. Les composantes p_0, q_0, r_0 de la rotation initiale par rapport au grand axe, à l'axe moyen et au petit axe de l'ellipsoïde central d'inertie ont respectivement pour valeurs

$$p_0 = \sqrt{6+\sqrt{5}}, \qquad q_0 = 0, \qquad r_0 = \sqrt{6-\sqrt{5}}.$$

On rappelle que le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être déterminé par les équations

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\,\frac{dp}{dt} + (\mathrm{C}-\mathrm{B})qr = \mathrm{L}, &\qquad p &= \sin\theta\sin\varphi\,\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\,\frac{d\theta}{dt},\\
&\mathrm{B}\,\frac{dq}{dt} + (\mathrm{A}-\mathrm{C})rp = \mathrm{M}, &\qquad q &= \sin\theta\cos\varphi\,\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\,\frac{d\theta}{dt},\\
&\mathrm{C}\,\frac{dr}{dt} + (\mathrm{B}-\mathrm{A})pq = \mathrm{N}, &\qquad r &= \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}.
\end{aligned}$$