Nouvelles annales de mathématiques

Question proposée

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 49

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__49_1>

QUESTION PROPOSÉE.

1593. Si l'on appelle O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit à un triangle ABC, I et r le centre et le rayon du cercle inscrit, H l'orthocentre, a, b, c les côtés, $2p$ le périmètre et S la surface du triangle OIH :

1° On a (avec $a > b > c$)

$$S = 2R^2 \sin\frac{A-C}{2} \sin\frac{A-C}{2} \sin\frac{A-B}{2},$$

$$S = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r},$$

$$16S^2 = -p^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 - r(4R+r)^3;$$

2° Si I′ et r' sont le centre et le rayon du cercle ex-inscrit dans l'angle intérieur A et S′ la surface du triangle OI′H, on a aussi

$$S' = 2R^2 \sin\frac{B-C}{2} \cos\frac{A-C}{2} \cos\frac{A-B}{2},$$

$$S' = \frac{(b-c)(a+c)(a+b)}{8r'},$$

$$S + S' = R^2 \sin(B-C);$$

3° La condition

$$p^4 - 2(R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R+r)^3 \leqq 0$$

exprime que le triangle ABC est possible avec ses éléments p, R, r.

(R. SONDAT.)