Nouvelles annales de mathématiques

Balitrand

Application des coordonnées intrinsèques. Caustiques par réflexion

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 476-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__476_1>

APPLICATION DES COORDONNÉES INTRINSÈQUES. CAUSTIQUES PAR RÉFLEXION;

PAR M. BALITRAND,
Élève de l'École Polytechnique.

Nous généraliserons un peu la définition ordinaire des caustiques.

Étant données deux courbes (M) et (M_0), la tangente en M à (M) rencontre (M_0) au point M_0. On mène en ce point la normale à (M_0) et l'on prend la droite symétrique de MM_0 par rapport à cette normale.

La droite ainsi obtenue enveloppe une courbe (M′) qui est la caustique par réflexion de (M_0) par rapport à (M). Si M′ est le point où la droite MM_0 touche son enveloppe (M′), les points M et M′ seront dits correspondants. Il faut remarquer tout d'abord la parfaite réciprocité qui existe entre (M) et (M′); de telle sorte que, (M′) étant la caustique de (M_0) par rapport à (M), (M) est la caustique de (M_0) par rapport à (M′).

Soient x et y les coordonnées du point M par rapport à la tangente et à la normale à (M_0) en M_0 (axes mobiles). Puisque le point M est le point où la droite MM_0 touche son enveloppe, on a, en adoptant les notations de M. Cesaro,

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds_0} = \frac{y-\rho_0}{\rho_0}, \qquad \frac{dy}{ds_0} = -\frac{x}{\rho_0}.$$

Si u et θ sont les coordonnées polaires de M, on aura de même les relations

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{ds_0} = -\cos\theta, \\ \dfrac{d\theta}{ds_0} = -\dfrac{1}{\rho_0} + \dfrac{\sin\theta}{u}. \end{cases}$$

Pour le point M′ dont l'angle polaire est $\pi - \theta$, on a

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{du'}{ds_0} = \cos\theta, \\ -\dfrac{d\theta}{ds_0} = -\dfrac{1}{\rho_0} + \dfrac{\sin\theta}{u'}. \end{cases}$$

Si l'on désigne par h et h' les segments déterminés par les normales en M et M′ à (M) et (M′) sur la normale en M_0 à (M_0), on déduit des formules (2) et (3)

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{d\theta}{ds_0},$$
$$\frac{1}{h'} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{d\theta}{ds_0},$$

et, par suite, en ajoutant

$$(4) \qquad \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} = \frac{2}{\rho_0},$$

c'est-à-dire que les normales en M et M′ divisent harmoniquement le rayon de courbure de (M_0) en M_0.

Les équations (2) et (3) nous fournissent ensuite

$$(5) \qquad du + du' = 0 \qquad \text{ou} \qquad d(u+u') = 0.$$

Pour interpréter cette relation, prenons le point M_1

symétrique de M par rapport à la tangente. On vérifie bien aisément que la droite M_0M_1 est normale à la courbe (M_1). La relation (5) s'écrit donc

$$d(M_1M') = 0,$$

c'est-à-dire que M_1M' touche son enveloppe au point M'.

Ainsi la courbe (M') est la développée de la courbe lieu des points tels que M_1. C'est la généralisation d'un théorème énoncé par Quetelet dans le cas où la courbe (M) se réduit à un point.

Si l'on prend le point M'_1 symétrique de M' par rapport à la tangente, la courbe (M) est la développée de la courbe (M'_1). Puisque les courbes (M) et (M') sont les développées des courbes (M_1) et (M'_1) et que l'on a $M_1M' = M'_1M$, les arcs élémentaires ds, ds' des courbes (M) et (M') sont égaux.

Si l'on observe que les angles de contingence des courbes (M) et (M') sont

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + d\theta,$$
$$\varepsilon' = \varepsilon_0 - d\theta,$$

on en déduit

$$\frac{ds}{\rho} = \left(\frac{\varepsilon_0}{ds_0} + \frac{d\theta}{ds_0}\right) = \frac{ds_0}{h},$$
$$\frac{ds}{\rho'} = \left(\frac{\varepsilon_0}{ds_0} - \frac{d\theta}{ds_0}\right) = \frac{ds_0}{h'},$$

d'où

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{h}{h'}.$$

Cette formule permet, connaissant le centre de courbure de l'une des courbes (M) ou (M'), de déterminer le centre de courbure de l'autre. Elle nous montre, en effet, que les parallèles, menées par les centres de courbure en deux points correspondant à la normale à (M_0), rencontrent les droites MM_0, $M'M_0$ en des points situés sur une droite parallèle à MM'.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les droites M_0M, M_0M' faisaient des angles égaux avec la normale en M_0. On peut plus généralement prendre

$$\theta' = f(\theta),$$

θ' désignant l'angle de M_0M' avec la normale.

On en déduit

$$d\theta' = f'(\theta)\, d\theta.$$

Les formules (2) et (3) nous donnent alors

$$(6) \qquad f'(\theta)\left(\frac{\sin\theta}{u} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \frac{\sin\theta'}{u'} - \frac{1}{\rho_0}.$$

En particulier, prenons

$$\sin\theta = n\sin\theta_1.$$

La formule (6) devient

$$\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{u} - \frac{1}{\rho_0}\right) = n\cos\theta_1\left(\frac{\sin\theta'}{u'} - \frac{1}{\rho_0}\right).$$