MAXIMILIEN MARIE

Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 435-444

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__435_1>

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève
et à l'École Monge (¹).

DES PÉRIODES DES INTÉGRALES.

13. Tous les parcours se ramenant les uns aux autres, nous pouvions donc réduire les chemins à considérer à des chemins composés d'arcs des deux enveloppes et d'arcs de conjuguées, d'un autre côté, comme l'intégrale $\int y\,dx$ ne peut s'accroître de constantes que dans des chemins fermés, à la fois par rapport à la variable et à la fonction, nous rechercherons les périodes d'une intégrale dans les parcours d'anneaux fermés de la courbe réelle, de l'enveloppe imaginaire et des conjuguées.

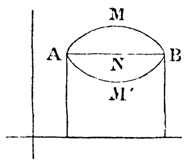
Des périodes engendrées dans le parcours d'anneaux fermés de la courbe réelle. — Si la courbe

(¹) *Voir* même tome, p. 58.

réelle représentée par l'équation $f(x, y) = 0$ du lieu considéré comprend quelques anneaux fermés, tels que AMBM'A (*fig.* 12), l'intégrale quadratrice de ce lieu, $\int y\,dx$, admettra évidemment pour périodes les aires enfermées respectivement dans ces différents anneaux fermés.

En effet, si le point $[x, y]$ parcourt un nombre quelconque de fois le chemin AMBM'A, l'intégrale $\int y\,dx$, durant le trajet AMB, s'augmentera de l'aire du diamètre ANB, conjugué des cordes de l'anneau parallèles à l'axe des y et de l'aire AMBNA du demi-anneau supérieur au-dessus de son diamètre, tandis que, dans le

Fig. 12.



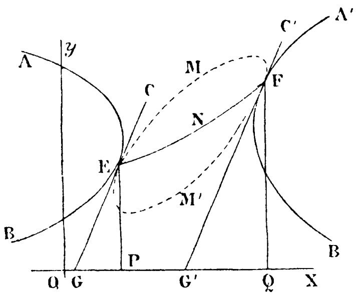
chemin BM'A, elle s'augmentera de l'aire, prise avec le signe —, du même diamètre et de l'aire BM'ANB, prise positivement, comprise entre la branche inférieure de l'anneau et le diamètre, aire d'ailleurs égale à la première, de sorte que, à la fin du parcours, l'aire engendrée sera celle comprise dans l'anneau AMBM'A.

Mais le parcours de la courbe réelle pourra donner lieu à la formation d'autres périodes qu'on n'apercevait pas tout d'abord et sur lesquelles nous reviendrons après avoir traité des périodes imaginaires engendrées dans le parcours des anneaux fermés de conjuguées.

Des périodes engendrées dans les parcours des anneaux fermés de conjuguées. — Le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans l'intérieur d'un anneau fermé d'une conjuguée quelconque d'un lieu $f(X, Y) = 0$ est l'une des périodes de la quadratrice $\int Y\,dX$ de ce lieu. En effet, soient AB, A'B' (*fig.* 13) deux branches de la courbe réelle comprenant entre elles une série de conjuguées fermées, telles que EMFM'E; soit ENF le lieu des milieux des cordes réelles de cette conjuguée parallèles aux deux tangentes EG, FG' à la courbe réelle : l'intégrale $\int y\,dx$ prise le long du chemin EMP se composera, d'après une des propositions qui précèdent :

De l'aire GENFG'G du diamètre ENF rapporté à

Fig. 13.



l'ancien axe des X et à une parallèle aux cordes réelles de la conjuguée;

De l'aire réelle du triangle G'FQ, diminuée de l'aire aussi réelle du triangle GEP;

Enfin, de l'aire EMFNE, comprise entre la demi-conjuguée et son diamètre, cette aire étant affectée du signe $+\sqrt{-1}$.

Mais si, arrivé en F, le point décrivant $[x, y]$ parcourt ensuite la branche inférieure FM'E de la conjuguée, dans ce nouveau parcours, l'intégrale $\int y\,dx$ s'accroîtra :

De l'aire FNEGG'F égale et de signe contraire à GENFG'G;

De l'aire réelle du triangle GEP diminuée de l'aire aussi réelle du triangle G'FQ, lesquelles détruiront les aires des mêmes triangles, engendrées d'abord avec des signes contraires;

Enfin, de l'aire F'M'ENF égale à EMFNE et engendrée avec le même signe $+\sqrt{-1}$.

En sorte que, dans le parcours entier du contour EMFM'E, l'intégrale $\int y\,dx$ s'accroîtra seulement du produit par $\pm\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans l'anneau de la conjuguée, $\sqrt{-1}$ devant être affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que le sens du mouvement aura été EMFM'E ou EM'FME.

Extension du second théorème d'Apollonius

$$\pi a' b' \sin\theta = \pi ab,$$

relatif aux coniques, aux courbes algébriques de tous les degrés. — Ce second théorème d'Apollonius, en ce qui concerne l'ellipse, ne constitue qu'un fait évident, puisqu'il signifie simplement que l'aire d'une ellipse reste la même, soit qu'on la rapporte à ses axes ou à deux de ses diamètres conjugués.

Mais, appliqué à l'hyperbole, ce même théorème signifie que toutes les ellipses conjuguées d'une même hyperbole ont même aire.

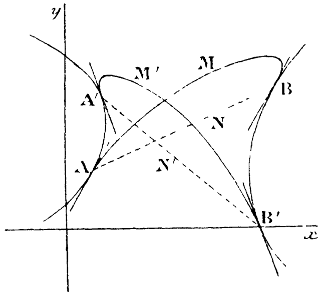
C'est ce théorème que nous allons étendre aux courbes algébriques de tous les degrés; il consiste en ce que les conjuguées fermées d'un même lieu, comprises entre les mêmes branches de la courbe réelle, ont toutes même aire.

Ce théorème est pour ainsi dire évident; car, dans l'hypothèse contraire, l'intégrale $\int y\,dx$ aurait une infinité de périodes imaginaires, c'est-à-dire serait complètement indéterminée.

Mais le théorème de Cauchy en fournira une démonstration directe :

Soient AMBNA et A′M′B′N′A′ (*fig.* 14) deux demi-conjuguées voisines, comprises entre les mêmes branches AA′, BB′ de la courbe réelle : les valeurs de l'intégrale $\int y\,dx$ prises d'abord le long du chemin AMB, ensuite le long du chemin AA′M′B′B seront égales, d'après le théorème de Cauchy; les parties imaginaires de ces deux valeurs seront donc les mêmes. Mais la

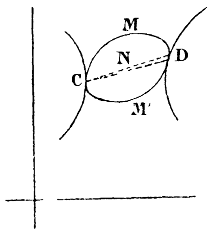
Fig. 14.



seule partie imaginaire de la première somme sera l'aire AMBNA comprise entre la première demi-conjuguée et le diamètre ANB, lieu des milieux de ses cordes réelles; de même dans la seconde somme, la seule partie imaginaire sera l'aire A′M′B′N′A′ comprise entre la seconde demi-conjuguée et le diamètre A′N′B′, lieu des milieux de ses cordes réelles; donc les demi-aires des deux conjuguées seront égales.

Nouvelle généralisation du même théorème. — Non seulement toutes les conjuguées fermées comprises entre les mêmes branches de la courbe réelle ont même aire, mais encore si l'on rejoignait deux points quelconques C et D (*fig.* 15) de ces deux branches par un chemin quelconque CMD, et qu'on le fermât par le lieu DM′C des points imaginaires conjugués de ceux qui constitueraient CMD, l'aire CMDM′C serait encore égale à celle d'une quelconque des conjuguées. En effet, si l'on se reporte à ce qui a été dit de la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$ prise le long d'un arc de l'enveloppe imaginaire, mais qui conviendrait également à la valeur de la même intégrale prise le long d'un chemin quel-

Fig. 15.



conque, en appliquant les formules, trouvées alors, aux deux arcs CMD et CM′D. On aura

$$I = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} + \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1}$$

et

$$I' = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} - \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1},$$

S_1 désignant l'aire du lieu CND des milieux des cordes joignant les points imaginaires conjugués des deux arcs CMD et CM′D, S et S′ les aires des segments correspondant aux arcs CMD et CM′D.

Mais l'intégrale prise le long de DM′C étant égale et de signe contraire à l'intégrale prise le long de CM′D, l'intégrale le long de CMDM′C sera la différence entre I et I′ ou $(S - S')\sqrt{-1}$, c'est-à-dire le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enveloppée par l'anneau CMDM′C.

D'un autre côté, le chemin CMDM'C pouvant être considéré comme une déformation du chemin constitué par une conjuguée fermée, les intégrales prises le long de l'une et l'autre seront égales; donc le contour CMDM'C, constitué comme on l'a dit, enveloppera une aire égale à celle d'un anneau fermé de conjuguée compris entre les mêmes branches de la courbe réelle.

Si les deux parties CMD et CM'D n'étaient plus formées de points imaginaires conjugués deux à deux, l'intégrale prise le long de CMDM'C n'en resterait pas moins l'une des périodes de $\int y\,dx$, mais elle n'aurait plus une représentation géométrique, simple parce que S_1 n'aurait pas la même valeur dans I et dans I', et que, d'ailleurs, les aires S et S' qui entrent dans I ne seraient plus les mêmes que celles qui entrent dans I'.

Des périodes engendrées dans le parcours des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire des conjuguées. — Il pourra se présenter trois cas distincts : le premier où l'un des anneaux fermés étant constitué par des points $\left[x = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}\right]$, les points imaginaires conjugués de ceux qui constituent le premier, $\left[x = \alpha - \beta\sqrt{-1},\ y = \alpha' - \beta'\sqrt{-1}\right]$, formeraient un autre anneau fermé, séparé du premier. C'est ce qui arrive dans le lieu

$$\left[(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2-(r+r'\sqrt{-1})^2\right]$$
$$\times\left[(x-a+b\sqrt{-1})^2+(y-a'+b'\sqrt{-1})^2-(r-r'\sqrt{-1})\right]^2=0,$$

où l'enveloppe imaginaire présente les deux anneaux fermés, conjugués, représentés en coordonnées réelles par les équations

$$(x-a-b)^2+(y-a'-b')^2=(r+r')^2$$

et

$$(x-a+b)^2+(y-a'+b')^2=(r-r')^2.$$

Il pourra arriver aussi que l'enveloppe imaginaire, fermée, se compose de points imaginaires conjugués deux à deux, mais de telle façon que cette enveloppe ne touchant pas la courbe réelle, qui pourra d'ailleurs ne pas exister, les deux suites de points imaginaires conjugués, qui constitueront cette enveloppe, ne se rejoindront jamais, de sorte que le premier point de la première partie de l'enveloppe coïnciderait avec le dernier point de la seconde partie et le dernier point de la première avec le premier de la seconde. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le cas de l'ellipse imaginaire

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Enfin, si les deux parties de l'anneau considéré, de l'enveloppe imaginaire, se rejoignaient sur la courbe réelle en deux points d'inflexion de cette courbe, les points imaginaires conjugués, qui constitueraient l'anneau de l'enveloppe, se rejoindraient aux deux points d'inflexion.

Dans le premier cas, les valeurs de l'intégrale $\int y\,dx$, prise successivement le long des deux anneaux considérés, seraient représentées par

$$I = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} + \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1}$$

et par

$$I' = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} - \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1},$$

S_1, S et S' ayant les valeurs définies plus haut.

Ainsi, par exemple, dans le cas du lieu

$$(x - a - b\sqrt{-1})^2 + (y - a' - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

le lieu des points milieux des cordes joignant les points imaginaires conjugués des enveloppes des deux lieux

$$(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2=(r+r'\sqrt{-1})^2$$

et

$$(x-a+b\sqrt{-1})^2+(y-a'+b'\sqrt{-1})^2=(r-r'\sqrt{-1})^2$$

sera, comme on l'a vu, la circonférence du cercle

$$(\alpha-a)^2+(\alpha'-a')^2=r^2,$$

de sorte que S_1 aura pour valeur

$$\pi r^2;$$

d'un autre côté, les deux enveloppes ayant pour équations, en coordonnées réelles,

$$(x-a-b)^2+(y-a'-b')^2=(r+r')^2$$

et

$$(x-a+b)^2+(y-a'+b')^2=(r-r')^2,$$

S aura pour valeur $\pi(r+r')^2$, et S' aura pour valeur $\pi(r-r')^2$.

La formule

$$I=2S_1-\frac{S+S'}{2}+\frac{S-S'}{2}\sqrt{-1}$$

donnera donc, pour valeur de la période de l'intégrale $\int y\,dx$, relative au premier lieu,

$$\begin{aligned}2\pi r^2-\tfrac{1}{2}\pi[(r+r')^2+(r-r')^2]\\+\tfrac{1}{2}\pi[(r+r')^2-(r-r')^2]\sqrt{-1}=\pi(r+r'\sqrt{-1})^2,\end{aligned}$$

comme on devait s'y attendre. La période, dans ce cas et tous les autres analogues, sera en partie réelle et en partie imaginaire.

Dans le second cas, les deux parties de l'enveloppe imaginaire, qui contiendront les points imaginaires conjugués deux à deux, se faisant suite l'une à l'autre, de manière que le dernier point de l'un des deux arcs coïncide avec le premier point de l'autre, l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de l'anneau formé par l'enveloppe, aura pour valeur la somme des deux intégrales I et I'; c'est-à-dire

$$4S_1 - (S + S').$$

La période sera donc réelle et égale à l'aire de l'anneau diminuée de quatre fois l'aire du segment correspondant au lieu des milieux des cordes joignant deux à deux les points imaginaires conjugués de l'anneau de l'enveloppe.

Toutefois, il pourra, je crois, arriver que le lieu des milieux des cordes réelles en question, ne présentant qu'un seul arc, dans l'intérieur de l'anneau de l'enveloppe, et cet arc devant être parcouru deux fois, en sens contraires, lors des formations des deux intégrales I et I', les aires $2S_1$ et $-2S_1$, que devraient contenir I et I', disparaîtraient de la somme $I + I'$.

Dans le cas de l'ellipse imaginaire $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, S_1 est nul de lui-même, parce que toutes les cordes réelles de l'enveloppe imaginaire ont leurs milieux à l'origine, et il reste seulement, pour $I + I'$, l'aire de l'ellipse réelle $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, homothétique à l'ellipse imaginaire.

Dans le dernier cas, l'intégrale rentrera dans le cas général d'une intégrale, prise le long d'un chemin fermé composé de points imaginaires conjugués deux à deux, qui se rejoindraient sur la courbe réelle : cette intégrale aura, comme on l'a vu, pour valeur le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans l'anneau de l'enveloppe imaginaire. (*A suivre.*)