NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES MAUPIN

Solutions de questions proposées pour la licence en juillet 1889, à Rennes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 420-424

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__420_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES POUR LA LICENCE EN JUILLET 1889, A RENNES;

PAR M. GEORGES MAUPIN,
Maître auxiliaire au lycée de Rennes.

1° *Trouver l'équation différentielle des courbes tracées sur une surface donnée, telles que l'angle formé par la tangente en un point quelconque avec la tangente conjuguée se projette sur le plan* xoy *suivant un angle droit. Montrer qu'il passe en chaque point de la surface deux courbes jouissant de cette propriété et qu'elles sont conjuguées l'une de l'autre. Effectuer l'intégration dans le cas où la surface donnée a pour équation*

$$8z = (x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2).$$

Soit (x, y, z) un point appartenant à l'une des courbes cherchées. La projection sur le plan des xy de la tangente en ce point à la courbe est représentée par

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}. \tag{1}$$

D'autre part, la tangente conjuguée est représentée par l'équation du plan normal

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

et l'équation qu'on tire de celle-ci en la différentiant par rapport au paramètre dont dépendent x, y, z, p et q. Cette équation

$$-dz = dp(X - x) + dq(Y - y) - p\,dx - q\,dy, \tag{2}$$

ou simplement

$$(3)\qquad (X - x)dp + (Y - y)dp = 0,$$

est justement la projection de la tangente conjuguée sur le plan des xy ; comme les droites (1) et (2) sont rectangulaires, on a

$$(4)\qquad dp\,dy - dq\,dx = 0.$$

C'est l'équation des lignes demandées, qu'on peut encore écrire, en développant dp et dq,

$$(5)\qquad S(dy^2 - dx^2) + (r - t)dx\,dy = 0.$$

Cela posé :

L'équation (5) étant du second degré en $\frac{dy}{dx}$, par chaque point de la surface il passe deux des lignes considérées.

La tangente T_1 à l'une de ces lignes est conjuguée de T_2, tangente à l'autre. Soit, en effet, C_1 la conjuguée de T_1 : par hypothèse C_1 et T_1 sont rectangulaires en projection ; mais la relation (5), où le produit des racines est égal à -1, montre qu'il en est de même de T_1 et T_2 ; donc T_2 et C_1 coïncident en projection, et par suite dans l'espace (elles sont toutes deux dans le plan tangent à la surface au point x, y, z).

Appliquons à la surface

$$(6)\qquad 8z = (x^2 + y^2)^2 + c^2(y^2 - x^2);$$

une première différentiation donne

$$\left\{\begin{aligned} 2p &= x(x^2 + y^2) - c^2x, \\ 2q &= y(x^2 + y^2) + c^2y; \end{aligned}\right.$$

par une deuxième différentiation, on a

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} 2r &= 3x^2 + y^2 - c^2, \\ 2t &= 3y^2 + x^2 + c^2, \\ 2s &= 2xy, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\begin{cases} r - t = x^2 - y^2 - c^2, \\ s \quad\;\; = xy: \end{cases}$$

l'équation (5) devient donc

$$xy(dy^2 - dx^2) + (x^2 - y^2 - c^2)dx\,dy = 0,$$

équation générale des coniques homofocales, qu'on intégrera en se reportant au numéro d'avril 1888 des *Nouvelles Annales* (solution de M. Étienne Pomey).

Ainsi, dans ce cas, les lignes demandées se projettent sur le plan des xy suivant les deux systèmes d'ellipses et d'hyperboles ayant leurs foyers sur ox, à la distance C de l'origine.

Si, en particulier, $C = 0$, on voit facilement que la relation (8) donne, d'une part, des cercles concentriques à l'origine, d'autre part, des droites issues de l'origine. Les lignes demandées sont ici les parallèles et les méridiens de la surface

$$8z = (x^2 + y^2)^2,$$

qui est de révolution autour de oz.

2° *Trouver l'équation générale des surfaces qui satisfont aux deux équations simultanées aux dérivées partielles*

$$(8)\qquad \begin{cases} s = xy, \\ r - t = x^2 - y^2 - c^2. \end{cases}$$

Les équations (7) montrent que la surface

$$(9)\qquad 8z_1 = (x^2 + y^2)^2 + c^2(y^2 - x^2)$$

est une intégrale des équations proposées. Posons alors

$$z = z_1 + \zeta$$

et désignons par r_1, s_1, t_1; ρ, σ, τ, les quantités qui pour z_1 et ζ correspondent à r, s, t pour z. En substituant cette valeur $z_1 + \zeta$ dans les équations (8), on a simplement

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma = 0,\\ \rho - z = 0.\end{array}\right. \tag{10}$$

Prenons d'abord l'équation $\sigma = 0$; intégrant une première fois par rapport à x, on a

$$\frac{d\zeta}{dy} = c_1 + \varphi(y);$$

une deuxième intégration par rapport à x donne ensuite

$$\zeta = c_1 + c_2 + \varphi(y) + \psi(x). \tag{11}$$

Cette valeur ζ satisfaisant à la deuxième équation (10), on a

$$\varphi''(y) - \psi''(x) = 0; \tag{12}$$

mais φ dépend uniquement de y, donc aussi φ'' dépend uniquement de y; ψ dépend uniquement de x, donc aussi ψ''. Il en résulte que $\varphi''(y)$ et $\psi''(x)$ sont tous deux égaux à une même constante K et, par suite, on a

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi = \dfrac{Ky^2}{2} + My + M',\\[2ex] \psi = \dfrac{Kx^2}{2} + Nx + N',\end{array}\right.$$

où M, M', N, N' sont des constantes arbitraires.

Remplaçant dans ζ, φ et ψ par ces valeurs, puis portant dans (10), on obtient

$$z = z_1 + \frac{Ky^2}{2} - \frac{Kx^2}{2} + My + Nx + M + M' + C_1 + C_2$$

ou, en tirant z_1 de (9),

$$z = \frac{1}{8}(x^2+y^2)^2 + \frac{1}{8}c^2(y^2 - x^2)$$
$$+ \frac{K}{2}y^2 + \frac{K}{2}x^2 + My + Nx + M + M' + C_1 + C_2,$$

c'est-à-dire

$$z = \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2 + Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

où A, C, D, E, F sont cinq constantes arbitraires. Telle est l'équation générale demandée.