

Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Centrale en 1888. Seconde session

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 410-417

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__410_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION
A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1888.**

SECONDE SESSION.

1. *On donne une ellipse rapportée à ses axes*

(1)
$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

et, dans son plan, un point P(p, q) par lequel on mène

deux droites parallèles aux bissectrices des angles des axes. On considère toutes les coniques passant par les points d'intersection de ces droites avec l'ellipse donnée. Écrire l'équation générale de ces coniques ; trouver le lieu de leurs centres et distinguer les portions de cette courbe qui correspondent à des centres d'ellipses ou à des centres d'hyperboles.

2. On prend la polaire de l'origine des coordonnées par rapport à chacune des coniques et l'on abaisse, du point P, une perpendiculaire sur cette polaire. Trouver le lieu des pieds de ces perpendiculaires.

3. Parmi les coniques considérées se trouvent deux paraboles, trouver leurs foyers pour une position donnée du point P et les lieux de ces foyers lorsque le point P parcourt : 1° une des bissectrices des axes de l'ellipse donnée ; 2° la circonférence circonscrite au rectangle des axes de cette ellipse.

SOLUTION.

1. L'équation du faisceau des droites AB, CD parallèles aux bissectrices des angles des axes, menées par le point P, est

$$(x-p)^2 - (y-q)^2 = 0,$$

et l'équation générale des coniques cherchées

$$(2) \quad (x-p)^2 - (y-q)^2 + \lambda(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) = 0.$$

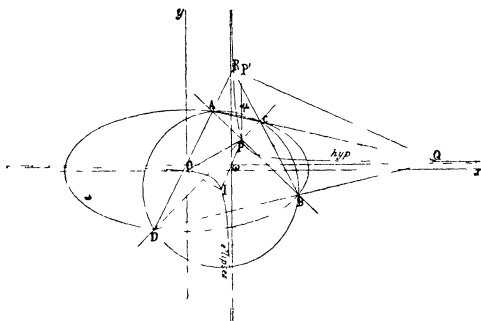
En éliminant λ entre les équations du centre

$$(3) \quad \begin{cases} (x-p) + \lambda b^2 x = 0, \\ -(y-q) + \lambda a^2 y = 0, \end{cases}$$

on a l'équation du lieu

$$(4) \quad a^2y(x-p) + b^2x(y-q) = 0.$$

Il existe, comme on sait, trois valeurs de λ pour lesquelles la conique (2) se réduit à un faisceau de deux droites : l'une de ces valeurs est 0 et correspond aux droites AB et CD; les deux autres, qu'il est inutile de chercher, correspondent aux droites AC et BD, AD et



BC; ces trois faisceaux de droites font connaître trois points du lieu P, Q, R. La conique (1) correspondant à $\lambda = \infty$ fait connaître le point O. On sait aussi que, par les points de rencontre d'une conique et de deux droites également inclinées sur ses axes, on peut faire passer un cercle, qui correspond ici à la valeur de λ donnée par l'équation

$$1 + \lambda b^2 = -1 + \lambda a^2 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{2}{a^2 - b^2}.$$

Cette valeur, substituée dans les équations (3), donne, pour les coordonnées du centre I du cercle, qui est un point du lieu,

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} P, \quad y = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} Q.$$

On voit que la droite OI est symétrique de la droite OP par rapport aux axes.

On sait encore que, par quatre points, on peut faire

passer deux paraboles, qui correspondent ici aux valeurs de λ données par l'équation

$$(-1 + \lambda a^2)(1 + \lambda b^2) = 0.$$

Ces valeurs, successivement substituées dans les équations (3), donnent, pour les coordonnées des centres des deux paraboles,

$$x = \frac{a^2}{a^2 + b^2} p, \quad y = \infty, \quad x = \infty, \quad y = \frac{b^2}{a^2 + b^2} q.$$

Les équations

$$x = \frac{a^2}{a^2 + b^2} p, \quad y = \frac{b^2}{a^2 + b^2} q$$

sont donc celles des diamètres des cordes parallèles aux axes des coordonnées, et, comme ces diamètres sont respectivement perpendiculaires aux cordes correspondantes, ce sont celles des axes des deux paraboles; d'ailleurs elles coïncident avec les équations des asymptotes de la conique (4),

$$a^2(x - p) + b^2x = 0, \quad a^2y + b^2(y - q) = 0;$$

elles fournissent donc les coordonnées de son centre. Or, si l'on prend le milieu ω de la distance OI , on a, pour les coordonnées de ce point,

$$x = \frac{p}{2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \frac{p}{2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} p,$$

$$y = \frac{q}{2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \frac{q}{2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} q.$$

Le point ω est donc le centre cherché, et l'hyperbole est amplement déterminée.

Le genre de la conique (4) dépend du signe du produit

$$(1 + \lambda b^2)(-1 + \lambda a^2);$$

ces deux facteurs s'expriment, en fonction des coordonnées d'un point du lieu, à l'aide des équations (3), qui donnent

$$1 + \lambda b^2 = \frac{p}{x}, \quad -1 + \lambda a^2 = -\frac{q}{y},$$

de sorte que le genre dépend du signe du produit xy . Si l'on suppose qu'on a pris pour angle des coordonnées positives celui qui contient le point P, un point du lieu dont les coordonnées sont de mêmes signes est un centre d'hyperbole, un point du lieu dont les coordonnées sont de signes contraires est un centre d'ellipse. La branche située dans l'angle $\gamma O x$ et qui contient les points P, Q, R correspond donc aux hyperboles, et l'autre située dans les deux angles adjacents et qui contient les points O et I correspond aux ellipses.

2. La polaire de l'origine, par rapport à la conique (2), et la perpendiculaire abaissée du point P sur cette polaire ont pour équations :

$$(5) \quad -p(x-p) + q(y-q) - \lambda a^2 b^2 = 0,$$

$$(6) \quad q(x-p) + p(y-q) = 0.$$

Les coordonnées d'un point du lieu vérifient les équations (5) et (6), et, comme l'équation (6) est indépendante de λ , elle est l'équation du lieu. La droite (5) ayant une direction constante, il suffit, pour construire la droite (6), de prendre la polaire du point O par rapport à l'une des coniques (2), par exemple par rapport au cercle ABCD, et de lui mener du point P une perpendiculaire. Or cette polaire est perpendiculaire à OI; donc la droite (6) est la parallèle à OI menée par le point P.

3. Considérons la parabole correspondant à $\lambda = \frac{1}{a^2}$,

qui a pour axe la parallèle à Oy menée par ω . La polaire du point P par rapport à cette parabole, comme par rapport à toutes les coniques (4), est la droite QR . Si donc on prend le point de rencontre P' avec QR de la parallèle à Oy menée par P , et le milieu M de PP' , M est le point de rencontre avec la parabole du diamètre PP' , la tangente en M est parallèle à QR et la normale lui est perpendiculaire. D'après un théorème connu, le milieu de la distance des points de rencontre de l'axe de la parabole avec ces deux droites est le foyer cherché. La polaire du point P a pour équation

$$b^2 p x + a^2 q y - a^2 b^2 = 0.$$

Remplaçons- y x par p : nous aurons, pour l'ordonnée du point P' ,

$$y = b^2 \frac{a^2 - p^2}{a^2 q},$$

et, par suite, pour celle du point M ,

$$y = \frac{a^2 q^2 - b^2 p^2 + a^2 b^2}{2 a^2 q}.$$

La tangente en ce point, parallèle à la polaire, a pour équation

$$b^2 p (x - p) + a^2 q \left(y - \frac{a^2 q^2 - b^2 p^2 + a^2 b^2}{2 a^2 q} \right) = 0,$$

et la normale

$$a^2 q (x - p) - b^2 p \left(y - \frac{a^2 q^2 - b^2 p^2 + a^2 b^2}{2 a^2 q} \right) = 0.$$

Remplaçons, dans ces deux équations, x par $\frac{a^2}{a^2 + b^2} p$, et prenons la demi-somme des valeurs correspondantes de y , nous aurons l'ordonnée du foyer

$$(7) \quad y = b^2 \frac{a^2 + b^2 - q^2 - p^2}{2(a^2 + b^2)q};$$

son abscisse est

$$(8) \quad x = \frac{a^2}{a^2 + b^2} p.$$

Si le point P décrit la bissectrice de l'angle $\gamma O x$, on a

$$(9) \quad p - q = 0;$$

s'il décrit celle de l'angle adjacent, on a

$$(9') \quad p + q = 0.$$

Des équations (8) et (9), ou (8) et (9'), on tire p et q et on les porte dans l'équation (7); on a, pour les équations des deux premiers lieux,

$$xy = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)}, \quad xy = \frac{-a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)},$$

hyperboles rapportées à leurs asymptotes et dont on construit aisément les points de rencontre avec les bissectrices des angles des axes.

Si le point P décrit la circonférence indiquée, on a

$$(9'') \quad p^2 + q^2 = a^2 + b^2 \quad \text{ou} \quad a^2 + b^2 - p^2 = q^2,$$

ce qui réduit l'équation (7) à

$$(7') \quad y = b^2 \frac{q^2}{(a^2 + b^2)q}.$$

Si q n'est pas nul, cette équation s'écrit

$$(7'') \quad y = \frac{b^2}{a^2 + b^2} q.$$

Des équations (8) et (7''), on tire p et q et on les porte dans l'équation (9''); on a, pour l'équation du troisième lieu,

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2 + b^2},$$

ellipse rapportée à ses axes, dont les longueurs se construisent sans difficulté. Si q est nul, $p = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$, y est indéterminé et $x = \frac{a^2}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$; le lieu se compose donc des tangentes à l'ellipse précédente aux points où elle rencontre l'axe des x .

Les résultats relatifs à la seconde parabole se déduisent de ceux qui précèdent en échangeant x et y , a et b , p et q ; on retrouve donc les deux hyperboles et l'ellipse précédentes; seulement, au lieu des tangentes aux points où cette ellipse rencontre l'axe des x , on a les tangentes aux points où elle rencontre l'axe des y . C. B.