Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Robert

Note sur une propriété du cylindre droit ayant pour directrice une spirale logarithmique

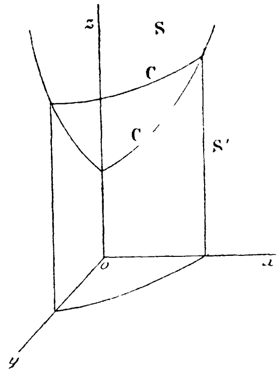
Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 392-395

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__392_1>

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DU CYLINDRE DROIT AYANT POUR DIRECTRICE UNE SPIRALE LOGARITHMIQUE;

PAR M. CH. ROBERT.

PROPOSITION. — *Étant donnée la courbe* C, *intersection d'une surface quelconque de révolution* S *autour* *d'un axe* Oz *avec un cylindre droit* S' *ayant pour directrice une spirale logarithmique de pôle* O, *la trans-*



formée de la courbe C, *quand on déroule le cylindre, est une courbe appartenant à la même famille que la méridienne* C' *de la surface de révolution* S.

En effet, soit

$$z = f(x)$$

l'équation de la méridienne,

$$z = f(r)$$

sera l'équation de la surface de révolution, r désignant le rayon du parallèle.

Soit maintenant

$$r = ae^{m\theta}$$

l'équation de la spirale logarithmique.

Les équations de la courbe C, intersection des deux surfaces, sont

$$(\mathrm{C}) \qquad \left\{ \begin{aligned} z &= f(r), \\ r &= ae^{m\theta}. \end{aligned} \right.$$

Dans le déroulement du cylindre sur le plan $z\mathrm{O}x$, la courbe obtenue aura même z que la courbe C, soit

$$z_1 = z;$$

son x sera donnée par l'équation

$$x_1 = s,$$

s représentant la longueur de l'arc correspondant de la spirale logarithmique, longueur que nous pourrons compter, par exemple, à partir du point O. La valeur en est donnée par l'équation

$$s = \int_0^r dr \sqrt{1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}}.$$

Or

$$dr = mae^{m\theta}\, d\theta = mr\, d\theta$$

et

$$r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2} = \frac{1}{m^2};$$

d'où

$$s = \int_0^r dr \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}$$

et, en intégrant,

$$s = r\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} = kr.$$

en posant, pour abréger,

$$k = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}.$$

La courbe déroulée aura donc pour équation

$$z_1 = f(r),$$
$$x_1 = kr;$$

d'où

$$z_1 = f\left(\frac{x_1}{k}\right).$$

Cette courbe n'est donc autre que la méridienne dans laquelle on a altéré les abscisses dans un rapport constant k. C'est une courbe de la même famille.

C. Q. F. D.

Corollaire. — La courbe de longueur minimum tracée sur le cylindre à base de spirale logarithmique devenant une droite après le déroulement de la surface, les lignes géodésiques du cylindre ne sont autres que ses intersections par des cônes de révolution d'axe Oz, la méridienne étant alors une droite.