MAXIMILIEN MARIE

Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 375-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__375_1>

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge (¹).

QUADRATURES.

10. *Une seule intégration suffit aux quadratures du lieu réel et de toutes ses conjuguées.* — En effet, d'abord, si les ordonnées de deux branches de la conjuguée à abscisses réelles sont

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{-\psi(x)}\sqrt{-1},$$

celles des deux branches correspondantes de la courbe

(¹) *Voir* même tome, p. 161.

réelle seront

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)},$$

et si l'on a pu obtenir l'intégrale indéfinie

$$\int_{x_0}^{x} \left[\varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)}\right] dx,$$

on aura obtenu en même temps l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \left[\varphi(x) \pm \sqrt{-\psi(x)}\,\sqrt{-1}\right] dx.$$

Si, en prenant cette dernière entre des limites a et b, on a trouvé pour résultat

$$A \pm B\sqrt{-1},$$

A sera l'aire du diamètre correspondant aux cordes réelles de la conjuguée, B sera l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre, et $A \pm B$ sera l'aire même de cette conjuguée.

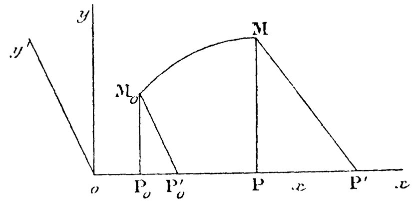
Ainsi, si l'on a pu obtenir l'intégrale $\int y\,dx$, elle fournira la quadrature d'une branche quelconque de la conjuguée à abscisses réelles, et l'on peut remarquer que l'aire de cette conjuguée sera mieux représentée que celle de la courbe réelle, parce que la présence du signe $\sqrt{-1}$ s'opposera à toute confusion entre l'aire du diamètre et l'aire de la courbe au-dessus ou au-dessous de son diamètre.

On pourrait obtenir l'aire d'une conjuguée quelconque en la rapportant au même axe des x et à un nouvel axe des y parallèle aux cordes réelles de cette conjuguée; mais la transformation ne sera jamais nécessaire, parce qu'il suffira d'obtenir l'aire indéfinie de la courbe réelle dans le nouveau système et que les aires de cette courbe, dans les deux systèmes, se déduisent aisément l'un de l'autre par l'addition et la soustraction de deux triangles.

Soient

OX, OY (*fig.* 6) les axes rectangulaires auxquels la courbe réelle était d'abord rapportée;

Fig. 6.



$M_0 M$ un arc quelconque de cette courbe;

OY' une parallèle aux cordes réelles de la conjuguée qu'on voudrait quarrer;

$M_0 P_0$ et MP les ordonnées anciennes de M_0 et M;

$M_0 P'_0$ et MP' leurs ordonnées nouvelles.

Si l'on connaissait l'expression de l'aire indéfinie $P'_0 M_0 MP'$, on en tirerait l'aire indéfinie de la conjuguée considérée, comprise entre l'axe des x, un arc quelconque de cette conjuguée et les cordes réelles passant par les extrémités de cet arc.

Mais on passe de l'aire supposée connue $P_0 M_0 MP$ à l'aire cherchée $P'_0 M_0 MP'$ en ajoutant à la première l'aire du triangle PMP' et en retranchant celle du triangle $P_0 M_0 P'_0$; soient $x_0 y_0$ et $x'_0 y'_0$ les coordonnées anciennes et nouvelles du point M_0, xy et $x'y'$ les coordonnées anciennes et nouvelles du point M, les aires des deux triangles MPP' et $M_0 P_0 P'_0$ seront

$$\tfrac{1}{2}\sin Y'Y\, yy' \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}\sin Y'Y\, y_0 y'_0$$

ou

$$-\tfrac{1}{2}\cos Y'X\, yy' \quad \text{et} \quad -\tfrac{1}{2}\cos Y'X\, y_0 y'_0;$$

mais il conviendra, dans les expressions de ces deux aires, de remplacer les ordonnées nouvelles y' et y'_0 par leurs valeurs en fonction de y et y_0 : l'une des formules de la transformation intervenue étant

$$y = y' \sin Y'X,$$

d'où

$$y' = \frac{y}{\sin Y'X},$$

on prendra donc, pour expressions des deux triangles,

$$-\frac{y^2}{2}\frac{\cos Y'X}{\sin Y'X} \quad \text{et} \quad -\frac{y_0^2}{2}\frac{\cos Y'X}{\sin Y'X},$$

c'est-à-dire

$$\frac{y^2}{2C} \quad \text{et} \quad \frac{y_0^2}{2C},$$

C désignant la caractéristique de la conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles au nouvel axe des y.

En définitive, on aura identiquement

$$\sin Y'X \int_{x'_0, y'_0}^{x', y'} y'\,dx' = \int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx + \frac{y_0^2 - y^2}{2C}.$$

Ainsi la seule intégration, marquée par

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx,$$

fournira les quadratures de toutes les conjuguées du lieu, en sorte que la question, en ce qui concerne ces quadratures, est entièrement résolue.

Il reste une question beaucoup plus importante, au point de vue du Calcul intégral, et qui consiste à obtenir l'interprétation de l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx$$

dans tous les cas que peut présenter le choix des limites

$[x_0, y_0]$ et $[x, y]$. Or la formule

$$\int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y} y\, dx = \sin \mathrm{Y}'\mathrm{X} \int_{x'_0,\, y'_0}^{x',\, y'} + \frac{y^2 - y_0^2}{2\mathrm{C}}$$

fournira cette interprétation dans tous les cas, comme on va le voir.

Mais, cette formule n'ayant été établie, par des considérations géométriques, que dans l'hypothèse particulière où les limites $[x_0, y_0]$ et $[x, y]$ seraient réelles, il ne sera pas inutile d'en donner une démonstration analytique, qui permette de la considérer comme une véritable identité absolue, applicable à tous les cas.

Soient

$$x = mx' + ny' \qquad \text{et} \qquad y = px' + qy'$$

les formules d'une transformation linéaire : la première donne

$$dx = m\, dx' + n\, dy',$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} \int y\, dx &= \int (px' + qy')(m\, dx' + n\, dy') \\ &= mp \int x'\, dx' + nq \int y'\, dy' + mq \int y'\, dx' + np \int x'\, dy' \\ &= \tfrac{1}{2} mpx'^2 + \tfrac{1}{2} nqy'^2 + mq \int y'\, dx' + np \int x'\, dy'; \end{aligned}$$

en intégrant par parties dans le dernier terme, on le remplacera par

$$np\left(x'y' - \int y'\, dx'\right),$$

et l'on aura, en définitive,

$$\int y\, dx = mp\,\frac{x'^2}{2} + nq\,\frac{y'^2}{2}\; mpx'y' + (mq - np) \int y'\, dx'.$$

Supposons maintenant la transformation

$$x = x' + y' \cos\alpha', \qquad y = y' \sin\alpha',$$

qui se rapporte au changement d'axes que nous avions en vue, on aura

$$m = 1, \qquad n = \cos\alpha', \qquad p = 0, \qquad q = \sin\alpha',$$

et il en résultera

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}\sin\alpha'\cos\alpha' y'^2 + \sin\alpha' \int y'\,dx'$$

ou, en remplaçant y'^2 par $\frac{y^2}{\sin^2\alpha'}$,

$$\int y\,dx = \frac{y^2}{2c} + \sin\alpha' \int y'\,dx'.$$

Comme nous l'avons déjà dit, la question la plus intéressante que présente l'étude d'une intégrale

$$\int_{x_0,\,y_0}^{x,\,y} y\,dx,$$

où y est une fonction implicite, consiste à définir la valeur concrète de cette intégrale, soit en raison des limites, soit en raison de la succession de valeurs qu'auraient prises les deux variables pour passer de leur état initial $[x_0, y_0]$ à leur état final $[x, y]$, de façon, non seulement à pouvoir, au besoin, si l'intégration n'avait pas pu être effectuée, appliquer à l'évaluation de l'intégrale les méthodes de quadratures approchées, par la substitution, à une courbe, de polygones inscrits et circonscrits, mais encore à lever les difficultés qui pourraient subsister quand même l'intégration aurait pu être effectuée.

Ces difficultés tiennent d'abord à ce que, si les limites sont données seulement en ce qui concerne x, c'est-à-dire si l'on ne donne que x_0 et x, y_0 et y auront chacune m valeurs, si l'équation entre x et y est de degré m par rapport à y, en sorte que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx$$

aurait toujours au moins m^2 valeurs; mais surtout à ce que l'intégrale indéfinie $\int y\,dx$, si elle avait pu être obtenue, pourrait être compliquée par la présence de constantes affectées de coefficients entiers arbitraires, comme on le voit par

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x,$$

à l'une quelconque des valeurs de laquelle on peut ajouter un nombre quelconque de fois 2π, et par

$$\int \frac{dx}{x} = \text{L}x,$$

à l'une quelconque des valeurs de laquelle on peut ajouter un nombre quelconque de fois $2\pi\sqrt{-1}$.

Ces constantes sont désignées sous le nom de *périodes de l'intégrale indéfinie;* et les nombres de fois que ces périodes doivent être introduites respectivement dans chaque intégrale définie dépendent du chemin suivi par le point $[x, y]$ pour aller du point $[x_0, y_0]$ au point $[x, y]$.

Nous chercherons d'abord à assigner, pour chaque système de limites, la valeur concrète la plus simple de l'intégrale définie; nous définirons et assignerons ensuite les valeurs concrètes des différentes périodes, en même temps que nous déterminerons les nombres qui devront en être pris dans chaque cas.

11. *De la valeur concrète la plus simple d'une intégrale, en raison de ses limites.* — Quelles que soient les limites assignées, on pourra toujours les relier l'une à l'autre, et même de plusieurs manières : d'abord par un arc de la conjuguée à laquelle appartiendra la limite inférieure, prolongée jusqu'à son point de contact avec l'une ou avec l'autre des deux enveloppes; par un arc de cette enveloppe, interrompu s'il est nécessaire par un

arc d'une conjuguée arbitraire, compris entre deux points consécutifs de contact de cette conjuguée avec l'enveloppe en question, dans le cas où l'on aurait à passer d'une branche de cette enveloppe à une autre de ses branches, qui n'aurait aucun point commun avec la première; par une branche de celle des deux enveloppes sur laquelle serait venu le point mobile, prolongée jusqu'à l'un de ses points de contact avec l'autre enveloppe, si cela était nécessaire; par une branche de celle des deux enveloppes qui toucherait la conjuguée à laquelle appartiendrait la limite supérieure, cette branche étant prolongée jusqu'à son point de contact avec la conjuguée en question; enfin, par l'arc de cette conjuguée qui rejoindrait le point de contact, déterminé precédemment, avec le point représentatif de la limite supérieure.

Le choix de ce chemin assignera la valeur concrète de l'intégrale, en en faisant une somme d'aires connues par ce qui précède, avec les signes sous lesquels il faudrait les introduire, sauf cependant pour le cas, que nous allons examiner à part, du parcours d'un arc de l'enveloppe imaginaire.

Évaluation concrète de l'intégrale $\int y\,dx$ prise le long d'un arc de l'enveloppe imaginaire. — Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

les coordonnées imaginaires d'un point quelconque de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu : un élément de l'intégrale prise le long de cette enveloppe sera

$$(\alpha' + \beta'\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$(\alpha'd\alpha - \beta'd\beta) + (\beta'd\alpha + \alpha'd\beta)\sqrt{-1};$$

la valeur totale de l'intégrale s'exprimera donc par

$$(\Sigma\alpha' d\alpha - \Sigma\beta' d\beta) - (\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta)\sqrt{-1}.$$

Considérons en même temps la branche de l'enveloppe imaginaire qui contiendrait les points imaginaires conjugués de ceux de la première, les coordonnées imaginaires d'un de ses points seront

$$x = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' - \beta'\sqrt{-1},$$

et l'un des éléments de l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de cette seconde branche, serait

$$(\alpha' - \beta'\sqrt{-1})(d\alpha - d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$\alpha' d\alpha - \beta' d\beta - (\beta' d\alpha - \alpha' d\beta)\sqrt{-1},$$

de sorte que la valeur totale de l'intégrale, prise le long de la seconde branche, s'exprimera par

$$(\Sigma\alpha' d\alpha - \Sigma\beta' d\beta) - (\Sigma\beta' d\alpha - \Sigma\alpha' d\beta)\sqrt{-1}.$$

Mais les coordonnées réelles d'un point du premier arc de l'enveloppe seraient $\alpha + \beta$ et $\alpha' + \beta'$, et celles du point correspondant du second arc seraient $\alpha - \beta$ et $\alpha' - \beta'$, de sorte que les aires comprises entre les deux arcs, l'axe des x et les ordonnées des extrémités de ces arcs, seraient

$$\begin{aligned} S &= \int(\alpha' + \beta')(d\alpha + d\beta) \\ &= (\Sigma\alpha' d\alpha - \Sigma\beta' d\beta) + (\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S' &= \int(\alpha' - \beta')(d\alpha - d\beta) \\ &= (\Sigma\alpha' d\alpha - \Sigma\beta' d\beta) - (\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta); \end{aligned}$$

ces deux équations donnent, par addition et par soustraction,

$$\Sigma\alpha' d\alpha + \Sigma\beta' d\beta = \frac{S + S'}{2}$$

et

$$\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta = \frac{S - S'}{2};$$

d'un autre côté, si l'on appelle S_1 l'aire du lieu des points milieux des cordes joignant les points imaginaires conjugués des deux arcs de l'enveloppe, c'est-à-dire si l'on pose

$$S_1 = \Sigma\alpha' d\alpha,$$

on aura

$$\Sigma\alpha' d\alpha - \Sigma\beta' d\beta = 2S_1 - \frac{S + S'}{2}.$$

L'intégrale $I = \int y\,dx$, prise le long du premier arc, aura donc pour valeur

$$I = 2S_1 - \frac{S + S'}{2} + \frac{S - S'}{2}\sqrt{-1};$$

quant à celle qui correspondrait au parcours du second arc, elle sera

$$I' = 2S_1 - \frac{S + S'}{2} - \frac{S - S'}{2}\sqrt{-1}.$$

Ainsi, dans tous les cas, quelles que soient les limites et quel que soit le nombre des arcs à emprunter aux deux enveloppes et aux conjuguées pour rejoindre ces deux limites, les m^2 valeurs de l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx$$

s'exprimeront toujours par des sommes d'aires connues; et l'une quelconque de ces aires pourra être obtenue par les formules ordinaires de quadrature approchée, parce que, sachant mener les tangentes aux deux enveloppes et aux conjuguées, on pourra toujours comprendre chaque aire à évaluer entre les aires de deux figures polygonales : l'une inscrite, l'autre circonscrite à l'arc correspondant du lieu.

En résumé, les m^2 valeurs de la quadratrice

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx$$

d'un lieu $f(x, y) = 0$, de degré m, pourront toujours recevoir des définitions nettes du choix de chemins, empruntés tant aux conjuguées qu'aux deux enveloppes, et propres à rejoindre les m limites inférieures de l'intégrale à ses m limites supérieures.

A la vérité, le chemin à suivre pour relier l'une des limites inférieures à l'une des limites supérieures pourrait être modifié de bien des manières différentes.

Mais toutes les intégrales qui auront le même système de limites ne pourront différer les unes des autres que par des constantes, parce qu'elles auront la même différentielle.

12. *Théorème de l'indépendance de la valeur d'une intégrale $\int y\,dx$ envers le chemin suivi pour en rejoindre les deux limites.* — La théorie précédente pourrait se suffire à elle-même ; cependant elle sera utilement complétée par un théorème dû à Cauchy, au moyen duquel on fera disparaître ce qu'il y a en apparence d'arbitraire dans le choix exclusif des chemins définis plus haut. Ce théorème, d'ailleurs, nous permettra d'obtenir l'infinie multitude des formes géométriques des aires propres à représenter les périodes d'une intégrale.

Ce théorème peut s'énoncer de la manière suivante : Un chemin $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, propre à rejoindre les deux limites d'une intégrale, et qui ne passe par aucun point du lieu considéré $f(x, y) = 0$, où la fonction y ou ses dérivées deviennent infinies, à partir d'un certain ordre, peut être modifié infiniment peu, puis insensiblement d'une manière appréciable, sans qu'il en résulte aucun changement dans la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, les limites restant les mêmes, pourvu que, durant sa déformation continue, ce chemin ne passe jamais par un seul point du lieu où y ou ses dérivées deviennent infinies à partir d'un certain ordre.

On peut établir ce théorème de la manière suivante :

Considérons seulement un élément de l'intégrale $\int y\,dx$: si l'on représente la fonction y par

$$F(x) = F(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

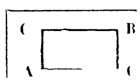
on pourra indifféremment remplacer cet élément par

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\alpha + F(\alpha + d\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1}$$

ou par

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1} + F(\alpha, \beta\sqrt{-1} + d\beta\sqrt{-1})\,d\alpha,$$

c'est-à-dire, qu'au lieu de faire croître en même temps α et β, pour obéir à la loi $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$. on pourra les faire croître successivement dans l'un ou l'autre ordre, de façon à modifier l'élément du chemin assigné $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, et à le changer indifféremment, comme l'indique la figure, de AB en ACB ou en AC'B,


: mais à la condition que

$$F(\alpha - d\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1}$$

et

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1} + d\beta\sqrt{-1})\,d\alpha$$

puissent se confondre respectivement avec

$$F(\alpha - \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad F(\alpha - \beta\sqrt{-1})\,d\alpha,$$

c'est-à-dire, comme

$$F(\alpha + d\alpha + \beta\sqrt{-1}) = F(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\alpha$$

et

$$\begin{aligned} &F(\alpha + \beta\sqrt{-1} + d\beta\sqrt{-1}) \\ &\quad = F(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

à la condition que $F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ ne soit pas infini, sans quoi $F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\alpha$, ni $F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1}$ ne pourraient plus être négligés.

On pourrait, sous des conditions analogues, modifier de même tous les éléments de l'intégrale, les uns dans un sens, les autres dans l'autre ; et recommencer indéfiniment, tant que le nouveau chemin ne contiendrait aucun des points où la fonction ou ses dérivées deviendraient infinies.

Nous énonçons ainsi les conditions à remplir par le chemin mobile : d'abord parce que, si y devenait infini, sa dérivée le deviendrait aussi ; en second lieu, parce que pour pouvoir de nouveau isoler, dans le nouveau dx, le nouveau $d\alpha$ du nouveau $d\beta$, et les faire passer l'un avant l'autre, dans l'un ou l'autre ordre, il faudrait que

$$F'(\alpha + d\alpha + \beta\sqrt{-1}) = F'(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F''(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\alpha$$

ou

$$\begin{aligned} &F'(\alpha + \beta\sqrt{-1} + d\beta\sqrt{-1}) \\ &\quad = F'(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F''(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1} \end{aligned}$$

se réduisissent l'un et l'autre à

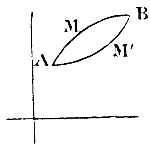
$$F'(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

c'est-à-dire que $F''(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ ne fût pas infini, et ainsi de suite.

Ainsi, deux chemins terminés aux mêmes extrémités pourront se substituer l'un à l'autre, si le premier peut se transformer insensiblement dans le second, sans que, dans ses formes intermédiaires, il passe jamais par un point où la fonction ou ses dérivées, à partir d'un certain ordre, deviendraient infinies.

Le théorème peut s'énoncer d'une autre manière : En

Fig. 7.



effet, si les valeurs de $\int y\,dx$, prises le long des chemins AMB (*fig.* 7) et AM'B, sont égales, la valeur de cette intégrale, prise le long du chemin fermé AMBM'A, sera nulle; en sorte que l'on peut dire qu'une intégrale $\int y\,dx$, prise le long d'un chemin fermé, est identiquement nulle, lorsque ce chemin fermé peut se réduire à un point unique, sans que, dans ses transformations successives, il passe jamais par un point où la fonction y ou ses dérivées deviendraient infinies à partir d'un certain ordre.

On remarquera que l'un ou l'autre théorème n'a d'autre objet que de compléter la notion originelle d'une intégrale; car il est bien évident que, si une intégrale $\int y\,dx$ pouvait, les limites restant les mêmes, varier d'une manière continue avec le chemin qui relierait ces deux limites, cette intégrale, dès lors, n'aurait pas de sens.

Mais on comprend parfaitement que, de loin en loin, l'intégrale puisse s'accroître de quantités finies, lorsque le chemin se déforme assez considérablement; quant à ces quantités finies, elles ne peuvent être que des constantes, par la raison, que nous avons déjà dite, que l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx,$$

prise entre les mêmes limites, conserve toujours la même dérivée, qui est la valeur de la fonction à la limite supérieure de l'intégrale.

On peut présenter le théorème de Cauchy d'une façon plus avantageuse : Si l'on établit entre les variables α, β, α' et β', une relation arbitraire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

cette relation, jointe aux deux dans lesquelles se décompose

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

fera de chacune des quatre variables une fonction de celle que l'on voudra des trois autres; d'un autre côté, l'intégrale

$$\int y\,dx = \int (\alpha' + \beta'\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

se décomposera en quatre autres

$$\int \alpha' d\alpha, \quad -\int \beta' d\beta, \quad \sqrt{-1}\int \beta' d\alpha \quad \text{et} \quad \sqrt{-1}\int \beta' d\alpha,$$

dans chacune desquelles on pourra considérer la variable finie comme une fonction de la variable dont la différentielle entre sous le même signe d'intégration; or il est facile de comprendre comment chacune des quatre intégrales pourrait n'acquérir qu'une valeur finale nulle, quand même la variable x serait revenue à sa valeur initiale, sans avoir repassé par la même série de valeurs.

Supposons, par exemple, que, au lieu d'une relation $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, entre les quatre variables, on en ait choisi une $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, entre α et β seulement, figurée par la courbe AB (*fig.* 8).

Fig. 8.

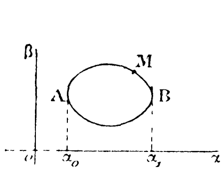
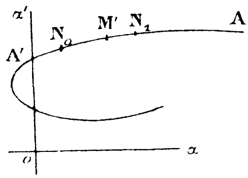


Fig. 9.



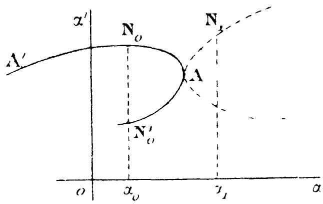
Il en résultera, entre α' et α, par exemple, une relation correspondante, figurée par une courbe telle que A'A (*fig.* 9).

Soient M et M' deux points correspondants de ces deux courbes, c'est-à-dire ayant la même abscisse α : dans l'hypothèse de la figure, $\int \alpha' d\alpha$ sera identiquement nulle, parce que, tandis que le point $[\alpha, \beta]$ fera le tour de la courbe AMB, c'est-à-dire tandis que α variera de sa valeur minimum α_0 à sa valeur maximum α_1 et reviendra de α_1 à α_0, le point $[\alpha', \alpha]$ ne pourra décrire, sur A'A, que l'arc N_0N_1, dont les extrémités auraient pour abscisses α_0 et α_1, et ensuite l'arc N_1N_0, de façon que l'aire engendrée dans l'aller serait détruite dans le retour.

Pour que l'aire $\int \alpha' d\alpha$ ne fût pas nulle, il faudrait que le point $[\alpha', \alpha]$ eût pu passer sur une autre branche de A'A que celle où se trouvait le point de départ, comme dans le cas de la *fig.* 10, où le point $[\alpha', \alpha]$ aurait parcouru le chemin N_0AN_1 dans l'aller et le chemin $N_1AN'_0$ dans le retour; c'est-à-dire qu'il faudrait que $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ fût devenu infini dans l'intervalle de α_0 à α_1.

Il en serait de même des trois autres intégrales : on arrive ainsi à une nouvelle expression de la condition pour qu'on puisse substituer un chemin à un autre, sans que l'intégrale change : au lieu de dire que, dans ses formes intermédiaires, le chemin ne doit passer par aucun point où $\frac{dy}{dx}$ devienne infini, on peut dire que le

Fig. 10.

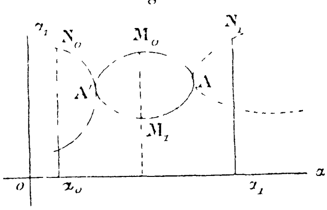


chemin variable doit rester tel que $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$, $\frac{d\beta'}{d\alpha}$, $\frac{d\alpha'}{d\beta}$ ni $\frac{d\beta'}{d\beta}$ ne deviennent infinis.

Il est aussi très aisé, dans cette nouvelle conception, de se rendre compte des conditions dans lesquelles l'intégrale $\int y\,dx$ peut s'accroître de quantités constantes dans un parcours fermé par rapport à x, c'est-à-dire lorsque α et β reviennent à leurs valeurs initiales, sans repasser par la même suite de valeurs.

Reprenons l'exemple de l'intégrale $\int \alpha' d\alpha$, et suppo-

Fig. 11.



sons que la courbe, dont les coordonnées sont α' et α, présente un anneau fermé compris entre les valeurs extrêmes α_0 et α_1 de α, comme l'indique la *fig.* 11.

Si l'on fait partir α de la valeur de l'abscisse du point M_0, qu'on le fasse croître jusqu'à sa valeur extrême α_1, abscisse de N_1, qu'on le fasse ensuite décroître de α_1 à l'abscisse du point M_0 ou du point M_1, mais qu'on suppose que, durant ces variations de α, le point $[\alpha', \alpha]$ ait parcouru le chemin $M_0AN_1AM_1$, l'intégrale $\int \alpha' d\alpha$ aura pris la valeur de l'aire M_0AM_1.

Cette aire dépendra de la valeur initiale de l'abscisse du point de départ, M_0 ; mais aussi α' ne sera pas revenu à sa valeur initiale, l'ordonnée de M_0.

Au contraire, si l'on faisait revenir α à sa valeur initiale, l'abscisse de M_0, en supposant que, après être arrivé à sa valeur extrême supérieure α_1, il fût revenu à sa valeur extrême inférieure α_0, pour reprendre ensuite sa valeur initiale, l'abscisse de M_0, et que, durant ce parcours, le point $[\alpha', \alpha]$ eût décrit les arcs M_0A, AN_1, N_1A, AM_1A', $A'N_0$, N_0A', $A'M_0$, l'intégrale $\int \alpha' d\alpha$ aurait crû de l'aire comprise dans le contour $A'M_0AM_1A'$, indépendante de la position du point de départ M_0.

D'où l'on voit que l'intégrale $\int y\,dx$ ne peut s'accroître d'une constante, dans un parcours fermé par rapport à la variable x, qu'autant que la fonction y revient elle-même à sa valeur initiale, en même temps que la variable x. *(A suivre.)*