Audibert

Solution de la question 1592

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 374-375

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__374_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 1392;

PAR M. AUDIBERT.

D'un point M *du plan d'une ellipse, on abaisse les quatre normales dont les pieds sont* A_1, A_2, A_3, A_4. *Chaque normale, telle que* MA_1, *rencontre le grand axe en* P_1 *et le petit axe en* Q_1. *Démontrer les relations*

$$(1) \qquad \frac{MA_1}{A_1P_1} + \frac{MA_2}{A_2P_2} + \frac{MA_3}{A_3P_3} + \frac{MA_4}{A_4P_4} = \text{const.},$$

$$(2) \qquad \frac{MA_1}{A_1Q_1} + \frac{MA_2}{A_2Q_2} + \frac{MA_3}{A_3Q_3} + \frac{MA_4}{A_4Q_4} = \text{const.}$$

(BARISIEN.)

Désignons par (x, y) les coordonnées du point A_1, par (α, β) celles du point M, et enfin par I_1 et B_1 les projections de A_1 sur l'abscisse et l'ordonnée du point M. Les triangles rectangles semblables MA_1B_1, $P_1A_1I_1$ donnent les proportions

$$(3) \qquad \frac{MA_1}{A_1P_1} = \frac{\alpha - x}{x - OP_1} = \frac{\beta - y}{y}.$$

D'ailleurs, en faisant $y = 0$ dans l'équation de la normale A_1P_1, on voit que $OP_1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x$.

Cela posé, si l'on égale à ρ les rapports (3) et si l'on élimine x et y entre les deux relations ainsi obtenues et l'équation de l'ellipse, on obtient l'équation

$$\rho^4 + \frac{2(a^2 + b^2)}{b^2}\rho^3 + \ldots = 0,$$

et, comme les racines de cette équation sont les valeurs des quatre rapports (1), on voit que la somme de ces rapports est constante et égale à $\frac{2(a^2 + b^2)}{b^2}$.

La démonstration de la relation (2) est tout à fait analogue.

N. B. — MM. Pellegrin et Reval nous ont adressé des solutions peu différentes de celle qui précède.