

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1889)

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 338-340

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9_338_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(CONCOURS DE 1889).

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites concourantes OA , OB et un point P pris dans leur plan :

1° Construire sur OA un point M , tel que les deux cercles S et S' passant par les points P et M et tangents à la droite OB se coupent sur un angle donné ω .

2° Étudier la variation de l'angle dans lequel se coupent les deux cercles S et S' quand le point M se déplace sur la droite OA .

3° Soient Q et Q' les deux autres points d'intersection des deux cercles S et S' avec la droite OA . Démontrer que le cercle circonscrit au triangle PQQ' est tangent à une droite qui reste fixe quand le point M décrit la droite OA .

Mathématiques spéciales.

On donne un cône du second degré C et deux quadriques A , A' , inscrites dans ce cône; on considère une quadrique variable S inscrite dans le même cône, et touchant les quadriques données A et A' en des points variables α et α' :

1° Démontrer que la droite $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe.

2° Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents à la surface S aux points α et α' .

3° Démontrer que le lieu du pôle d'un plan fixe P par rapport à la surface S se compose de deux quadriques bitangentes.

4° Trouver le lieu de la droite qui passe par les points de contact de ces deux quadriques, lorsque le plan P se déplace, en restant parallèle à un plan tangent au cône C .

*Composition sur l'Analyse et ses applications
géométriques.*

Theorie. — Exposer le principe de la méthode donnée par Laplace pour l'intégration de l'équation (E) aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{d^2 z}{dx dy} + a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} + cz = 0,$$

où a, b, c désignent des fonctions quelconques de x et de y .

On définira les fonctions h et k des coefficients a, b, c , qui ont été appelées *invariants*, et l'on justifiera cette dénomination; enfin on établira les conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite de Laplace se termine dans les deux sens.

Application. — Soient h et k les invariants de l'équation aux dérivées partielles (E), et h_1, k_1 les invariants de l'équation (E₁) obtenue en appliquant la méthode de Laplace.

Trouver les formes que doivent avoir les invariants h et k pour que l'on ait les deux relations

$$h_1 = lh, \quad k_1 = mk,$$

l et m étant des constantes.

Déterminer les formes que prennent, dans ces conditions, les coefficients a, b, c de l'équation (E).

Composition de Mécanique rationnelle.

On donne une surface S dont l'équation, par rapport à trois axes rectangulaires ox, oy, oz est

$$z = e^{x+y},$$

e désignant la base des logarithmes népériens.

Un point matériel M dont on prend la masse pour unité est assujéti à se mouvoir sur la surface S; il est en outre soumis à l'action de forces extérieures données.

La surface S tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de la droite OA dont les équations, par rapport aux axes ox, oy, oz sont

$$x = y = z.$$

1° Former les équations différentielles qui définissent le mouvement relatif du point M sur la surface S;

2° Calculer la réaction N de cette surface;

3° Étudier ce mouvement relatif en supposant le point M attiré vers le point O par une force F proportionnelle à la distance MO, et vers le plan P mené par le point O perpendiculairement à la droite OA, par une force F₁ proportionnelle à la distance Mm du point M à ce plan P.

Les intensités des forces F et F₁, à l'unité de distance, ont respectivement pour valeur ω^2 et $3\omega^2$.

A l'origine du temps le mobile M se trouve au point ayant pour coordonnées

$$x = y = 0, \quad z = 1;$$

de plus on a, au même instant,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2\omega}{\sqrt{3}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2\omega}{\sqrt{3}}.$$