E. CESARO

Sur l'étude intrinsèque des surfaces réglées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 294-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__294_0>

SUR L'ÉTUDE INTRINSÈQUE DES SURFACES RÉGLÉES;

PAR M. E. CESARO.

Nos *Remarques sur les surfaces gauches* (¹) contiennent, sous une forme plus ou moins explicite, les théorèmes énoncés par M. Bioche dans une Communication *Sur les surfaces réglées passant par une courbe donnée*, qui vient d'être faite à l'Académie des Sciences (²). On sait combien il est commode, pour étudier les surfaces gauches, de prendre pour axes la tangente, la binormale et la normale principale en un point mobile de la ligne de striction. Si

$$a = \cos\theta, \qquad b = \sin\theta \sin\varphi, \qquad c = \sin\theta \cos\varphi.$$

sont, par rapport à ces axes, les cosinus directeurs de la génératrice, on a, avec les notations de M. Bioche,

$$\frac{da}{ds} = \omega c, \qquad \frac{db}{ds} = (\pi - G_0)\,c, \qquad \frac{dc}{ds} = -\,\omega a - (\pi - G_0)\,b,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\theta}{ds} = -\,\omega \cos\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \pi + \omega \cot\theta \sin\varphi - G_0,$$

G_0 étant la valeur de la courbure totale G sur la ligne de striction. Plus généralement

$$\frac{d\theta}{ds} = -\,\omega \cos\varphi + \frac{\delta\theta}{ds}, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \pi + \omega \cot\theta \sin\varphi + \frac{\delta\varphi}{ds},$$

quelle que soit la courbe fondamentale, en désignant

(¹) *Nouvelles Annales*, 1889; p. 445-458.
(²) *Comptes rendus*, 10 mars 1890.

par $\delta\theta$ et $\delta\varphi$ les variations éprouvées par θ et φ lorsqu'on passe du point s au point $s + ds$, les axes restant fixes.

Soit $\delta\psi$ l'angle des génératrices issues de ces points, et D l'inclinaison du plan tangent sur la commune perpendiculaire aux deux droites, de sorte que $D = 0$ sur la ligne de striction, $D = 90°$ à l'infini. On sait que la courbure totale en tout point de la surface est

$$G = G_0 \cos^2 D,$$

et il est aisé de voir que

$$\delta\theta = \delta\psi \sin D, \qquad \delta\varphi = \delta\psi \frac{\cos D}{\sin\theta}.$$

Cela étant, en vertu de la définition du paramètre distributeur des plans tangents, la distance de deux génératrices consécutives, évidemment égale à

$$- \sin\theta \cos D \, ds,$$

est, d'autre part, exprimée par $\frac{\delta\psi}{G_0}$. En conséquence,

$$\frac{\delta\psi}{ds} = - G \frac{\sin\theta}{\cos D}, \qquad \frac{\delta\theta}{ds} = - G \sin\theta \tang D, \qquad \frac{\delta\varphi}{ds} = - G.$$

Les formules fondamentales pour l'étude intrinsèque des surfaces réglées sont donc

$$\frac{d\theta}{ds} = - \omega \cos\varphi - G \sin\theta \tang D, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \pi + \omega \cot\theta \sin\varphi - G.$$

Lorsque la génératrice est invariablement liée aux axes mobiles, ces formules donnent

$$G = \pi + \omega \cot\theta \sin\varphi = - \omega \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \cot D.$$

Si l'on observe que la longueur du segment de génératrice, intercepté par la courbe à partir du point central, est

$$r = -\frac{\tan D}{G_0} = -\frac{\sin D \cos D}{G},$$

on obtient, par élimination de G et D, l'équation

$$(\omega a + \pi b)^2 + (\omega^2 + \pi^2)c^2 = \frac{\omega c}{r},$$

qui représente le cylindre signalé par M. Bioche et, avant lui, par d'autres ([1]). De même, l'observation de M. Bioche, relative au changement de π en $\pi - G$, est comprise parmi les *Remarques sur les surfaces gauches* ([2]). Quelques énoncés de cette Note contiennent, à vrai dire, des restrictions inutiles, dues au choix particulier qu'on a voulu faire de la courbe fondamentale; mais, en ne rien supposant sur cette ligne, il est facile de restituer aux énoncés dont il s'agit toute la généralité dont ils sont susceptibles, et l'on peut alors étudier fort aisément les lignes asymptotiques ($\varphi = 0$), les géodésiques ($\varphi = 90°$), les lignes de courbure, etc., en attribuant à G, successivement, les formes

$$\pi, \quad \pi + \omega \cot\theta, \quad \omega \cot\theta \sin\varphi.$$

Soient Γ et Δ les valeurs de G et D, relatives à la surface formée par les normales à la première surface, le long de la ligne considérée. Si l'on change θ et φ en $90°$ et $\varphi + 90°$ dans les formules fondamentales, on obtient les relations

$$\Gamma = G - \omega \cot\theta \sin\varphi, \qquad \Gamma \tan\Delta = \omega \sin\varphi.$$

([1]) *Mathesis*, 1885, p. 199; *Nouvelles Annales*, 1889, p. 456.
([2]) *Nouvelles Annales*, 1889, p. 447.

qui expliquent comment il se fait que l'équation $\Gamma = 0$ caractérise les lignes de courbure de la surface. On s'en rend compte aussi en remarquant que Δ est l'angle que la tangente à la courbe fondamentale fait avec sa conjuguée, génératrice de la développable circonscrite : l'équation $\Delta = 90^\circ$ caractérise aussi les lignes de courbure.