M. D'OCAGNE

Deux théorèmes généraux sur les trajectoires de point et les enveloppes de droites dans le plan

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 289-293

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__289_0>

DEUX THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES TRAJECTOIRES DE POINTS ET LES ENVELOPPES DE DROITES DANS LE PLAN [1];

PAR M. M. D'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. Si une droite issue du point M coupe la courbe C au point P sous l'angle θ, je dis que MP est une *distance sous l'angle* θ du point M à la courbe C.

Lorsque $\theta = 0$, la distance correspondante est dite *tangentielle;* lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, elle est dite *normale*.

Soient $l_1, l_2, \ldots, l_n$ les distances sous l'angle θ du point M à une ou plusieurs courbes C. Si ces distances sont liées par la relation

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0,$$

le point M décrit une courbe (M) dont nous allons déterminer la normale.

Considérons une des distances $MP_i = l_i$. Soit Ω_i le centre de courbure répondant au point P_i. L'angle de la normale $P_i\Omega_i$ avec MP_i étant constant, on a le point H_i où MP_i touche son enveloppe en abaissant sur cette droite, du point Ω_i, la perpendiculaire $\Omega_i H_i$. Soit N_i le point où $\Omega_i H_i$ coupe la normale cherchée; on a, en appelant ds la différentielle de l'arc de la courbe (M), $d\alpha_i$ la différentielle de l'angle que fait MP_i avec un axe fixe

(1) Les énoncés de ces théorèmes ont été communiqués à l'Académie des Sciences (voir *Comptes rendus*, séance du 23 décembre 1889).

quelconque du plan

$$dl_i = N_i\Omega_i \, d\alpha_i,$$
$$ds = MN_i \, d\alpha_i;$$

d'où

$$dl_i = \frac{N_i\Omega_i}{MN_i} \, ds.$$

Mais, si Ω'_i est le pied de la perpendiculaire abaissée de Ω_i sur la tangente en M à la courbe (M), on a

$$\frac{N_i\Omega_i}{MN_i} = \frac{M\Omega'_i}{MH_i};$$

par suite

$$dl_i = \frac{M\Omega'_i}{MH_i} \, ds.$$

Si donc, dans l'équation obtenue par différentiation de la relation donnée, on remplace dl_1, dl_2, ..., dl_n par leurs valeurs tirées de la formule précédente, on obtient, après suppression du facteur commun ds,

$$\frac{M\Omega'_1}{MH_1}\frac{d\varphi}{dl_1} + \frac{M\Omega'_2}{MH_2}\frac{d\varphi}{dl_2} + \ldots + \frac{M\Omega'_n}{MH_n}\frac{d\varphi}{dl_n} = 0.$$

Cette équation exprime, en vertu du théorème des moments, que le centre de gravité des masses $\frac{1}{MH_1}\frac{d\varphi}{dl_1}$, $\frac{1}{MH_2}\frac{d\varphi}{dl_2}$, ..., $\frac{1}{MH_n}\frac{d\varphi}{dl_n}$, respectivement appliquées en Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n, se trouve sur la normale $MN_1N_2 \ldots N_n$.

De là ce théorème :

Théorème I. — *Si les distances sous l'angle* θ, $MP_1 = l_1$, $MP_2 = l_2$, ..., $MP_n = l_n$, *d'un point* M *à une ou plusieurs courbes* C, *sont liées par la relation*

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0$$

et si les centres de courbure Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n *répondant* *aux points* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *se projettent respectivement en* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *sur* $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$, *la normale à la trajectoire du point* M *passe par le centre de gravité des masses* $\frac{1}{MH_1}\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{1}{MH_2}\frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{1}{MH_n}\frac{d\varphi}{dl_n}$, *respectivement appliquées en* $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$.

2. Lorsque $\theta = 0$ (distances tangentielles), H_1, $H_2, \ldots, H_n$ coïncident respectivement avec $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Remarquons alors que

$$\frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i} = \frac{d\varphi}{d\left(\frac{l_i^2}{2}\right)};$$

on tombe sur le théorème obtenu récemment par M. J. Pomey dans les *Nouvelles Annales* (1889, p. 527) par une tout autre voie.

3. Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ (distances normales), $H_1, H_2, \ldots, H_n$ coïncident respectivement avec $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ qui se trouvent alors sur $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$. Or, d'après le théorème de Lagrange et Leibnitz, le centre de gravité des masses $\frac{1}{M\Omega_1}\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{1}{M\Omega_2}\frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{1}{M\Omega_n}\frac{d\varphi}{dl_n}$ appliquées en $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ se trouve sur la résultante des vecteurs $\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{d\varphi}{dl_n}$ issus de M et respectivement dirigés suivant $M\Omega_1, M\Omega_2, \ldots, M\Omega_n$, ou, ce qui revient au même, $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$. Cette résultante se confond donc avec la normale en M à la courbe (M) et l'on retrouve ainsi le classique théorème de Poinsot [1], généralisé pour le cas du plan.

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, XIII^e Cahier, p. 206-241.

4. De même, si la perpendiculaire élevée en A à la droite D coupe la courbe C au point P sous l'angle θ, je dis que AP est une distance sous l'angle θ de la droite D à la courbe C.

Cherchons à déterminer la normale à l'enveloppe d'une droite D dont les distances, sous l'angle θ, l_1, l_2, ..., l_n à diverses courbes C sont liées par la relation

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0.$$

Soient $A_i P_i = l_i$ une de ces distances, et Ω_i le centre de courbure répondant au point P_i; l'angle de $A_i P_i$ avec la normale $P_i \Omega_i$ étant constant, le point H_i où $A_i P_i$ touche son enveloppe est le pied de la perpendiculaire abaissée sur cette droite, du centre de courbure Ω_i.

Soit M le point où la droite D touche son enveloppe (D). La normale à la courbe (D), c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en M à la droite D coupant $H_i \Omega_i$ en N_i, ce point est le centre instantané de rotation de l'angle droit $P_i A_i M$, et $N_i A_i$ est la normale à la courbe décrite par le point A_i. On a donc, en appelant $d\alpha$ la différentielle de l'angle que fait la droite D avec un axe fixe quelconque du plan

$$dl_i = N_i \Omega_i \, d\alpha.$$

ou, si Ω'_i est le pied de la perpendiculaire abaissée de Ω_i sur la droite D,

$$dl_i = M\Omega'_i \, d\alpha.$$

La différentiation de la relation donnée conduit donc, en tenant compte de cette formule et supprimant le facteur commun $d\alpha$, à l'équation

$$\frac{d\varphi}{dl_1} M\Omega'_1 + \frac{d\varphi}{dl_2} M\Omega'_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{dl_n} M\Omega'_n = 0,$$

qui montre que le centre de gravité des masses $\dfrac{d\varphi}{dl_1}$,

$\frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{d\varphi}{dl_n}$ respectivement appliquées en Ω_1, $\Omega_2, \ldots,$ Ω_n se trouve sur la normale cherchée $MN_1N_2\ldots N_n$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Si les distances sous l'angle* θ, l_1, $l_2, \ldots, l_n$ *d'une droite* D *à une ou plusieurs courbes* C, *sont liées par la relation*

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0,$$

la normale à l'enveloppe de la droite D *passe par le centre de gravité des masses* $\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{d\varphi}{dl_n}$, *respectivement appliquées aux centres de courbure correspondants des courbes* C.

5. Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ (distances normales), $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ sont respectivement situés sur A_1P_1, $A_2P_2, \ldots, A_nP_n$; on voit donc alors, en projetant sur la droite D, que le point de contact M est le centre de gravité des masses $\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{d\varphi}{dl_n}$ respectivement appliquées en A_1, $A_2, \ldots, A_n$.

On retrouve ainsi un théorème que M. H. Laurent a obtenu par la voie analytique ([1]).

([1]) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIII, 1874.