C.-R.-J. KALLENBERG VAN DEN BOSCH

Solution de la question 1592

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 198-199

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__198_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 1392

(voir 3e série, t. IX, p. 20)

PAR M. C.-R.-J. KALLENBERG VAN DEN BOSCH,
Ingénieur civil à Breda (Hollande).

D'un point M *du plan d'une ellipse, on abaisse les quatre normales dont les pieds sont* A_1, A_2, A_3, A_4. *Chaque normale, telle que* A_1M *rencontre le grand axe en* P_1 *et le petit axe en* Q_1. *Démontrer les relations*

$$\frac{MA_1}{A_1P_1}+\frac{MA_2}{A_2P_2}+\frac{MA_3}{A_3P_3}+\frac{MA_4}{A_4P_4}=\text{const.},$$

$$\frac{MA_1}{A_1Q_1}+\frac{MA_2}{A_2Q_2}+\frac{MA_3}{A_3Q_3}+\frac{MA_4}{A_4Q_4}=\text{const.}$$

(E. BARISIEN.)

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses des points A_1, A_2, A_3, A_4, ξ et η les coordonnées du point M, par rapport aux axes de l'ellipse, et nommons B_1 le pied de la perpendiculaire abaissée de A_1 sur le grand axe, on a

$$\frac{MA_1}{A_1P_1}=\frac{x_1-\xi}{P_1B_1}\quad\text{et}\quad P_1B_1=\frac{b^2}{a^2}x_1,$$

donc

$$\frac{MA_1}{A_1P_1}=\frac{a^2}{b^2}\,\frac{x_1-\xi}{x_1},$$

$$\frac{MA_1}{A_1P_1}+\frac{MA_2}{A_2P_2}+\frac{MA_3}{A_3P_3}+\frac{MA_4}{A_4P_4}$$

$$=\frac{a^2}{b^2}\sum_1^4\frac{x_1-\xi}{x_1}=\frac{a^2}{b^2}\left(4-\xi\,\frac{\sum_1^4 x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}\right).$$

Les pieds des normales abaissées de M étant donnés par l'intersection de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et de l'hyperbole équilatère

$$c^2 xy + b^2 \eta x - a^2 \xi y = 0,$$

leurs abscisses sont les racines de l'équation

$$x^4 - \frac{2a^2\xi}{c^2} x^3 + \ldots + \frac{2a^4\xi}{c^2} x - \frac{a^6\xi^2}{c^4} = 0,$$

obtenue par l'élimination de y ; de manière qu'on a

$$\sum_1^4 x_1 x_2 x_3 = -\frac{2a^4\xi}{c^2} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 x_3 x_4 = -\frac{a^6\xi^2}{c^4}.$$

La substitution de ces valeurs donne

$$\frac{MA_1}{A_1P_1} + \frac{MA_2}{A_2P_2} + \frac{MA_3}{A_3P_3} + \frac{MA_4}{A_4P_4} = \frac{a^2}{b^2}\left(4 - \frac{2c^2}{a^2}\right) = 2\,\frac{a^2 + b^2}{b^2}.$$

Pour $\frac{MA_1}{A_1Q_1}$, on trouve

$$\frac{MA_1}{A_1Q_1} = \frac{x_1 - \xi}{x_1};$$

donc

$$\frac{MA_1}{A_1Q_1} + \frac{MA_2}{A_2Q_2} + \frac{MA_3}{A_3Q_3} + \frac{MA_4}{A_4Q_4} = 2\,\frac{a^2 + b^2}{a^2}.$$