

C.-R.-J. KALLENBERG VAN
DEN BOSCH

Solution de la question 1592

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 198-199

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__198_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 1392

(voir l'écrit à IX p 20)

PAR M. C.-R.-J. KAMLENBERG VAN DEN BOSCH

Ingénieur civil à Breda (Hollande)

D'un point M du plan d'une ellipse, on abaisse les quatre normales dont les pieds sont A₁, A₂, A₃, A₄. Chaque normale, telle que A₁M rencontre le grand axe en P₁ et le petit axe en Q₁. Démontrer les relations

$$\frac{MA_1}{A_1P_1} + \frac{MA_2}{A_2P_2} + \frac{MA_3}{A_3P_3} + \frac{MA_4}{A_4P_4} = \text{const.},$$

$$\frac{MA_1}{A_1Q_1} + \frac{MA_2}{A_2Q_2} + \frac{MA_3}{A_3Q_3} + \frac{MA_4}{A_4Q_4} = \text{const.}$$

(E. BIRSHAN)

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses des points A₁, A₂, A₃, A₄, ξ et r_1 les coordonnées du point M, par rapport aux axes de l'ellipse, et nommons B₁ le pied de la perpendiculaire abaissée de A₁ sur le grand axe, on a

$$\frac{MA_1}{A_1P_1} = \frac{r_1 - \xi}{P_1B_1} \quad \text{et} \quad P_1B_1 = \frac{b^2}{a^2} r_1$$

donc

$$\frac{MA_1}{A_1P_1} = \frac{a^2}{b^2} \frac{r_1 - \xi}{x_1}$$

$$\frac{MA_1}{A_1P_1} + \frac{MA_2}{A_2P_2} + \frac{MA_3}{A_3P_3} + \frac{MA_4}{A_4P_4} = \frac{a^2}{b^2} \sum_1^4 \frac{r_1 - \xi}{r_1} = \frac{a^2}{b^2} \left(4 - \xi \frac{\sum_1^4 x_1 x_2 x_3 x_4}{r_1 r_2 r_3 r_4} \right)$$

Les pieds des normales abaissées de M étant donnés par l'intersection de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et de l'hyperbole équilatère

$$c^2xy + b^2\eta x - a^2\xi y = 0,$$

leurs abscisses sont les racines de l'équation

$$x^4 - \frac{2a^2\xi}{c^2}x^3 + \dots + \frac{2a^4\xi}{c^2}x - \frac{a^6\xi^2}{c^4} = 0,$$

obtenue par l'élimination de y ; de manière qu'on a

$$\sum_1^4 x_1 x_2 x_3 = -\frac{2a^4\xi}{c^2} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 x_3 x_4 = -\frac{a^6\xi^2}{c^4}.$$

La substitution de ces valeurs donne

$$\frac{MA_1}{A_1P_1} + \frac{MA_2}{A_2P_2} + \frac{MA_3}{A_3P_3} + \frac{MA_4}{A_4P_4} = \frac{a^2}{b^2} \left(1 - \frac{2c^2}{a^2} \right) = 2 \frac{a^2 + b^2}{b^2}.$$

Pour $\frac{MA_1}{A_1Q_1}$, on trouve

$$\frac{MA_1}{A_1Q_1} = \frac{x_1 - \xi}{x_1};$$

donc

$$\frac{MA_1}{A_1Q_1} + \frac{MA_2}{A_2Q_2} + \frac{MA_3}{A_3Q_3} + \frac{MA_4}{A_4Q_4} = 2 \frac{a^2 + b^2}{a^2}.$$