

B. NIEWENGLOWSKI

Note sur le théorème de Sturm

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 181-182

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__181_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LE THÉOREME DE STURM;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

Soit $f(x)$ un polynôme entier de degré m , à coefficients réels. Désignons par ν_α le nombre des variations présentées par la suite de Sturm relative à $f(x)$ et à sa dérivée, quand on substitue à x le nombre réel α . Si l'on désigne par $\varphi(x)$ le polynôme formé en prenant, dans chacun des polynômes successifs de la suite de Sturm considérée, le terme ayant le plus haut degré, et si l'on appelle ν le nombre de variations de $\varphi(x)$ et ν' celui de $\varphi(-x)$, on sait que

$$\nu + \nu' = m - 2k,$$

k étant un nombre entier positif ou nul, puisque le degré de $\varphi(x)$ est égal à m .

Or on a évidemment

$$\nu_{-\infty} = \nu', \quad \nu_{+\infty} = \nu,$$

donc on a aussi

$$(1) \quad \nu_{-\infty} + \nu_{+\infty} = m - 2k$$

Cela posé, soit $2I$ le nombre des racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$. Si toutes les racines de cette équation sont distinctes, on sait que

$$(2) \quad \nu_{-\infty} - \nu_{+\infty} = m - 2I.$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$(3) \quad v_{-\infty} = m - 1 - k,$$

$$(4) \quad v_{+\infty} = 1 - k.$$

Si l'on désigne par n le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ qui sont supérieures à α , on a

$$v_{\alpha} - v_{+\infty} = n;$$

donc, en vertu de l'équation (4),

$$(5) \quad v_{\alpha} = n + 1 - k.$$

Lorsque la suite de Sturm est complète, le polynôme $\varphi(x)$ est complet : dans ce cas

$$v + v' = m;$$

on doit donc faire $k = 0$ dans les formules précédentes, et l'on a alors

$$v_{-\infty} = m - 1,$$

$$v_{+\infty} = 1,$$

$$v_{\alpha} = n + 1.$$