H. BROCARD

Solution de la question 1566

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 157-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__157_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 1366

(voir 3e série, t. VI, p. 299);

PAR M. H. BROCARD.

DL *étant la perpendiculaire élevée sur l'axe focal d'une conique par l'un des points de cet axe d'où la conique est vue sous un angle droit, et* P *désignant le pôle de la droite* DL *par rapport à la conique, si un cercle, ayant son centre sur cette conique et tangent à la droite* DL, *coupe l'axe focal aux points* M_1 *et* M_2, *le rapport de* PM_1 *à* PM_2 *est constant.*

Que devient le théorème dans le cas de l'hyperbole équilatère? (MAURICE D'OCAGNE.)

La conique étant supposée une ellipse rapportée à ses axes, le point D est à l'intersection de l'axe focal et du cercle orthoptique, cercle qui est concentrique à l'ellipse et qui a pour rayon $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. On trouve facilement que le pôle P de la droite DL est à une distance $OP = \frac{a^2}{d}$.

Le cercle ayant son centre (α, β) sur l'ellipse et tangent à la droite DL a pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (d - \alpha)^2,$$

et les abscisses des points M_1, M_2 sont données par l'équation

$$(x - \alpha)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = (d - \alpha)^2,$$

d'où

$$x = \frac{a\alpha \pm (a^2 - d\alpha)}{a}.$$

On en déduit

$$x_1 = PM_1 = \frac{a\alpha - (a^2 - d\alpha)}{a} - \frac{a^2}{d} = \frac{(a^2 - d\alpha)(d - a)}{ad},$$

$$x_2 = PM_2 = \frac{a\alpha + (a^2 - d\alpha)}{a} - \frac{a^2}{d} = \frac{(d\alpha - a^2)(d + a)}{ad};$$

d'où, au signe près,

$$\frac{PM_1}{PM_2} = \frac{d - a}{d + a} = \text{const.} = \frac{DA_1}{DA_2},$$

A_1, A_2 étant les sommets de l'axe focal.

Comme cas particuliers d'une vérification immédiate, on peut considérer les cercles ayant leurs centres aux quatre sommets de l'ellipse.

Dans le cas de l'hyperbole dont les asymptotes forment un angle aigu, le cercle orthoptique est réel et la propriété subsiste moyennant le changement de $\sqrt{a^2 + b^2}$ en $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Mais, à mesure que l'angle des asymptotes augmente et devient très voisin de 90°, le point P s'éloigne sur l'axe focal, la droite DL se rapproche du centre de la conique, et le rapport des segments PM_1, PM_2 a pour limite 1, lorsque l'hyperbole est équilatère. Le segment M_1M_2 est alors toujours réduit à un point.