

GAMBEY

**Solution de la question de mathématiques  
spéciales proposée au concours d'agrégation  
des sciences mathématiques de 1889**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 9  
(1890), p. 129-138

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1890\\_3\\_9\\_\\_129\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__129_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES  
PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES  
MATHÉMATIQUES DE 1889;**

PAR M. GAMBÉY.

Professeur au lycée de Rouen.

---

*On donne un cône du second degré C et deux quadratiques A, A', inscrites dans ce cône; on considère une quadrique variable S inscrite dans le même cône, et touchant les quadratiques données A et A' en des points variables  $\alpha$  et  $\alpha'$ .*

1<sup>o</sup> *Démontrer que la droite  $\alpha\alpha'$  passe par un point fixe.*

2<sup>o</sup> *Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents à la surface S aux points  $\alpha$  et  $\alpha'$ .*

3<sup>o</sup> *Démontrer que le lieu du pôle d'un plan fixe P par rapport à la surface S se compose de deux quadratiques bitangentes.*

4<sup>o</sup> *Trouver le lieu de la droite qui passe par les points de contact de ces deux quadratiques, lorsque le plan P se déplace, en restant parallèle à un plan tangent au cône C.*

Nous prendrons pour axes de coordonnées les axes principaux du cône donné, dont l'équation sera ainsi

$$AX^2 + BY^2 - CZ^2 = 0.$$

Celles des trois quadriques pourront s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{A} \quad & \text{AX}^2 + \text{BY}^2 - \text{CZ}^2 - (\text{aX} + \text{bY} + \text{cZ} + d)^2 = 0, \\ \text{A}' \quad & \text{AX}^2 + \text{BY}^2 + \text{CZ}^2 - (\text{a}_1\text{X} + \text{b}_1\text{Y} + \text{c}_1\text{Z} + d_1)^2 = 0, \\ \text{S} \quad & \text{AX}^2 + \text{BY}^2 + \text{CZ}^2 - (\text{lX} + \text{mY} + \text{nZ} + p)^2 = 0. \end{aligned}$$

Les coefficients  $a, b, c, d; a_1, b_1, c_1, d_1$  sont donnés; mais  $l, m, n, p$  sont variables.

Soient  $x, y, z$  les coordonnées du point  $\alpha$ , et  $x', y', z'$  celles du point  $\alpha'$ . Je pose, pour abrégér l'écriture,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Ax}^2 + \text{By}^2 + \text{Cz}^2 &= \text{V}, \\ \text{ax} + \text{by} + \text{cz} - d &= \text{P}, \\ \text{a}_1x' + \text{b}_1y' + \text{c}_1z' + d_1 &= \text{P}'_1, \\ \text{lx} + \text{my} + \text{nz} + p &= \text{Q}, \\ \text{l}'x' + \text{m}'y' + \text{n}'z' + p' &= \text{Q}'_1; \end{aligned} \right.$$

et je considère  $\text{V}, \text{P}, \dots$  comme des inconnues auxiliaires. En outre, en prévision de certaines relations importantes que j'aurai à employer, je fais encore

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{l^2}{\text{A}} + \frac{m^2}{\text{B}} - \frac{n^2}{\text{C}} - 1 &= \lambda, & \frac{a^2}{\text{A}} + \frac{b^2}{\text{B}} + \frac{c^2}{\text{C}} - 1 &= \mu, \\ \frac{al}{\text{A}} + \frac{bm}{\text{B}} + \frac{cn}{\text{C}} &= \mu, & \frac{a_1^2}{\text{A}} + \frac{b_1^2}{\text{B}} - \frac{c_1^2}{\text{C}} - 1 &= \mu_1, \\ \frac{a_1l}{\text{A}} + \frac{b_1m}{\text{B}} + \frac{c_1n}{\text{C}} &= \mu_1. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, l'identification des plans tangents en  $\alpha$  aux quadriques  $\text{A}$  et  $\text{S}$  donne

$$x = \frac{\text{PQ}(ld - ap)}{\text{A}(dP - pQ)}, \quad y = \frac{\text{PQ}(md - bp)}{\text{B}(dP - pQ)}, \quad z = \frac{\text{PQ}(nd - cp)}{\text{C}(dP - pQ)}.$$

Substituant ces valeurs de  $x, y, z$  dans celles des relations (1) qui les contiennent, on obtient les trois

équations suivantes

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & V(dP - pQ)^2 \\ & = P^2 Q^2 \left[ \frac{(ld - ap)^2}{A} + \frac{(md - bp)^2}{B} + \frac{(nd - cp)^2}{C} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & (P - d)(dP - pQ) \\ & = PQ \left[ \frac{(ld - ap)a}{A} + \frac{(md - bp)b}{B} + \frac{(nd - cp)c}{C} \right], \\ & (Q - d)(dP - pQ) \\ & = PQ \left[ \frac{(ld - ap)l}{A} + \frac{(md - bp)m}{B} + \frac{(nd - cp)n}{C} \right], \end{aligned} \right.$$

auxquelles il faut joindre

$$V = P^2 = Q^2.$$

Prenons d'abord  $P - Q = 0$ . En remplaçant  $V$  par  $P^2$ , ainsi que  $Q$  par  $P$ , dans l'équation (3), et supprimant le facteur  $P^3$ , on obtient la relation

$$\frac{(ld - ap)^2}{A} + \frac{(md - bp)^2}{B} + \frac{(nd - cp)^2}{C} - (p - d)^2 = 0.$$

c'est-à-dire

$$(A) \quad d^2\lambda - 2pd(\mu - 1) + p^2k = 0.$$

Cette condition exprime que le plan

$$(5) \quad lX + mY + nZ + p - (aX + bY + cZ + d) = 0$$

est tangent à la quadrique  $A$  en  $\alpha$ , à cause de  $P - Q = 0$ .

En éliminant  $P$  et  $Q$  entre les équations (4), on retrouve l'équation (A).

Si l'on prend, au contraire,  $P + Q = 0$ , on arrive à la condition

$$(B) \quad d^2\lambda - 2pd(\mu + 1) + p^2k = 0,$$

qui exprime que le plan

$$(6) \quad lX + mY + nZ + p + (aX + bY + cZ + d) = 0$$

est tangent aussi en  $\alpha$  à la quadrique A. Ainsi, selon que l'on prend  $P - Q = 0$  ou  $P + Q = 0$ , le plan (5) est le plan tangent commun aux quadriques A et S en  $\alpha$ , ou bien c'est le plan (6).

Il est évident que la considération du plan tangent en  $\alpha'$  conduirait à des relations analogues à (A) et à (B), où  $a, b, c, d$  seraient remplacées par  $a_1, b_1, c_1, d_1$ , et que ce plan tangent est

$$(7) \quad lX + mY + nZ + p - (a_1X + b_1Y + c_1Z - d_1) = 0,$$

si l'on prend  $P'_1 - Q' = 0$ ; ou bien

$$(8) \quad lX + mY + nZ - p - (a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1) = 0,$$

si l'on prend  $P'_1 + Q' = 0$ . Les relations analogues à (A) et à (B) sont

$$(A_1) \quad d_1^2 \lambda - \nu p d_1 (\mu_1 - 1) + p^2 k_1 = 0,$$

$$(B_1) \quad d_1^2 \lambda - 2p d_1 (\mu_1 - 1) + p^2 k_1 = 0.$$

Dans l'hypothèse  $P - Q = 0$ , les expressions de  $x, y, z$  sont

$$x = P \frac{ld - ap}{A(d - p)}, \quad y = P \frac{md - bp}{B(d - p)}, \quad z = P \frac{nd - cp}{C(d - p)}.$$

Multipliant respectivement par  $a, b, c$  et ajoutant, on détermine P, dont la valeur est donnée par la formule

$$P = \frac{d(p - d)}{d(\mu - 1) - pk} = \frac{2pd(p - d)}{d^2 \lambda - p^2 k}.$$

La seconde forme est obtenue en éliminant  $\mu$  à l'aide de la relation (A).

Il en résulte

$$x = \frac{-\nu p d (ld - ap)}{A(d^2 \lambda - p^2 k)}, \quad y = \frac{-\nu p d (md - bp)}{B(d^2 \lambda - p^2 k)}, \quad z = \frac{-\nu p d (nd - cp)}{C(d^2 \lambda - p^2 k)}.$$

Et l'on aurait de même, pour  $P'_1 - Q' = 0$ ,

$$\begin{aligned} x' &= \frac{-2pd_1(ld_1 - a_1p)}{A(d_1^2\lambda - p^2k_1)}, \\ y' &= \frac{-2pd_1(md_1 - b_1p)}{B(d_1^2\lambda - p^2k_1)}, \\ z' &= \frac{-2pd_1(nd_1 - c_1p)}{C(d_1^2\lambda - p^2k_1)}. \end{aligned}$$

I. *La droite  $ax'$  passe par un point fixe.* — Les équations

$$\frac{X - x}{x' - x} = \frac{Y - y}{y' - y} = \frac{Z - z}{z' - z}$$

de la droite  $ax'$ , transformées en  $y$  substituant les valeurs ci-dessus de  $x, y, z; x', y', z'$ , peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{AX(d^2\lambda - p^2k) - 2pd(ld - ap)}{AX(d_1^2\lambda - p^2k_1) + 2pd_1(ld_1 - a_1p)} \\ &= \frac{BY(d^2\lambda - p^2k) + 2pd(md - bp)}{BY(d_1^2\lambda - p^2k_1) + 2pd_1(md_1 - b_1p)} \\ &= \frac{CZ(d^2\lambda - p^2k) + 2pd(nd - cp)}{CZ(d_1^2\lambda - p^2k_1) + 2pd_1(nd_1 - c_1p)}. \end{aligned}$$

En désignant par  $\varphi$  la valeur commune de ces trois rapports, et en se bornant au premier, on obtient aisément

$$\frac{AX}{2} = \frac{ad - \varphi d_1 d_1 - \frac{l}{p}(d^2 - \varphi d_1^2)}{\frac{\lambda}{p^2}(d^2 - \varphi d_1^2) - (k - \varphi k_1)}.$$

Les seules quantités qui dépendent encore de  $l, m, n, p$  sont  $\frac{l}{p}$  et  $\frac{\lambda}{p^2}$ . Si on annule leur coefficient commun  $d^2 - \varphi d_1^2$ , la valeur de  $X$  deviendra indépendante de  $l, m, n, p$  et, par conséquent, des coordonnées des points  $x$  et  $x'$ . Il suffit de prendre  $\varphi = \frac{d^2}{d_1^2}$ , et l'on obtient

$$\frac{2dd_1(ad_1 - da_1)}{A(d^2k_1 - kd_1^2)}, \quad Y_0 = \frac{2dd_1(bd_1 - db_1)}{B(d^2k_1 - kd_1^2)}, \quad Z_0 = \frac{2dd_1(cd_1 - dc_1)}{C(d^2k_1 - kd_1^2)}.$$

Or les équations tangentielles des quadriques A et A', savoir

$$d^2 \left( \frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} \right) + 2 dr \left( \frac{au}{A} + \frac{bv}{B} + \frac{cw}{C} \right) + kr^2 = 0,$$

$$d_1^2 \left( \frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} \right) + 2 d_1 r \left( \frac{a_1 u}{A} + \frac{b_1 v}{B} + \frac{c_1 w}{C} \right) + k_1 r^2 = 0,$$

donnent aisément les équations des sommets des deux cônes circonscrits à la fois à A et à A'. Ce sont

$$v = 0,$$

équation de l'origine, et

$$2 dd_1 \left( \frac{ad_1 - da_1}{A} u + \frac{bd_1 - db_1}{B} v + \frac{cd_1 - dc_1}{C} w \right) + d^2 k_1 - kd_1^2 = 0.$$

Les coordonnées-points de ce second sommet sont donc

$$x_0 = \frac{2 dd_1 (ad_1 - da_1)}{A(d^2 k_1 - kd_1^2)},$$

$$y_0 = \frac{2 dd_1 (bd_1 - db_1)}{B(d^2 k_1 - kd_1^2)},$$

$$z_0 = \frac{2 dd_1 (cd_1 - dc_1)}{C(d^2 k_1 - kd_1^2)}.$$

Ainsi l'on a

$$X_0 = x_0, \quad Y_0 = y_0, \quad Z_0 = z_0,$$

et la droite  $\alpha z'$  passe constamment par le sommet du second cône circonscrit à la fois aux deux quadriques A et A'.

II. *Lieu des intersections des plans tangents en  $\alpha$  et  $\alpha'$ .* — Il suffit, pour l'obtenir, de retrancher membre à membre les équations (5) et (7), ou bien (6) et (8); puis, les équations (5) et (8), ou bien (6) et (7). On obtient ainsi deux plans, savoir

$$(a - a_1)X + (b - b_1)Y + (c - c_1)Z - d - d_1 = 0.$$

$$(a + a_1)X - (b + b_1)Y + (c + c_1)Z + d + d_1 = 0.$$

III. *Lieu du pôle d'un plan fixe par rapport aux quadriques S.* — Soit

$$(9) \quad uX + vY + wZ - 1 = 0$$

un plan fixe, et posons

$$ux + vy + wz - 1 = H,$$

$x, y, z$  étant les coordonnées du pôle du plan (9) par rapport à S. On aura facilement

$$Ax - lQ = pQu, \quad By - mQ = pQv, \quad Cz - nQ = pQw;$$

d'où

$$l = \frac{Ax - pQu}{Q}, \quad m = \frac{By - pQv}{Q}, \quad n = \frac{Cz - pQw}{Q},$$

et, en multipliant par  $x, y, z$  et ajoutant les résultats, on trouve d'abord

$$(10) \quad p = \frac{V - Q^2}{HQ};$$

par suite, on a

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = \frac{AHx - (V - Q^2)u}{HQ}, \\ m = \frac{BH, y - (V - Q^2)v}{HQ}, \\ n = \frac{CHz - (V - Q^2)w}{HQ}. \end{array} \right.$$

La substitution de ces valeurs de  $l, m, n, p$  dans les équations (A) et (A<sub>1</sub>), par exemple, permet de les mettre sous la forme

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} hQ^2 - 2dHQ - h\Lambda + R^2 - P^2 = 0, \\ h_1Q^2 - 2d_1HQ - h_1\Lambda + R_1^2 - P_1^2 = 0 \end{array} \right.$$



en supprimant le facteur  $\mathbf{V} = \mathbf{Q}^2$ , et en posant encore

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{(a + du)^2}{\mathbf{A}} + \frac{(b + dv)^2}{\mathbf{B}} - \frac{(c - dw)^2}{\mathbf{C}} - 1 = h, \\ \frac{(a_1 + d_1 u)^2}{\mathbf{A}} - \frac{(b_1 + d_1 v)^2}{\mathbf{B}} + \frac{(c_1 - d_1 w)^2}{\mathbf{C}} - 1 = h_1, \\ (a + du)x - (b + dv)y - (c - dw)z = \mathbf{R}, \\ (a_1 + d_1 u)x + (b_1 + d_1 v)y + (c_1 + d_1 w)z = \mathbf{R}_1; \\ ax + by - cz + d = \mathbf{P}, \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = \mathbf{P}_1 \end{cases}$$

L'élimination de  $\mathbf{Q}$  entre les équations obtenues conduit à

$$(G) \quad \begin{cases} [dh_1(\mathbf{P} + \mathbf{R}) - d_1 h(\mathbf{P}_1 - \mathbf{R}_1)]^2 \\ = [(dh_1 - hd_1)][(dh_1 - hd_1)\mathbf{V} + dd_1 \mathbf{H}(\mathbf{P} + \mathbf{R} - \mathbf{P}_1 - \mathbf{R}_1)]. \end{cases}$$

équation d'une quadrique circonscrite à la quadrique

$$(dh_1 - hd_1)\mathbf{V} + dd_1 \mathbf{H}(\mathbf{P} + \mathbf{R} - \mathbf{P}_1 - \mathbf{R}_1) = 0,$$

le plan de la courbe de contact étant

$$dh_1(\mathbf{P} - \mathbf{R}) - d_1 h(\mathbf{P}_1 - \mathbf{R}_1) = 0.$$

En substituant les valeurs de  $l, m, n, p$  dans les relations (B) et (B<sub>1</sub>), on est encore conduit à la même équation (C).

Mais, si l'on associe (A) avec (B<sub>1</sub>), ou (A<sub>1</sub>) avec (B), on trouve l'équation d'une autre quadrique analogue à (C), savoir

$$(C') \quad \begin{cases} [dh_1(\mathbf{P} + \mathbf{R}) - d_1 h(\mathbf{P}_1 + \mathbf{R}_1)]^2 \\ = [(dh_1 + hd_1)][(dh_1 + hd_1)\mathbf{V} - dd_1 \mathbf{H}(\mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{P}_1 + \mathbf{R}_1)]. \end{cases}$$

Ces deux quadriques sont bitangentes.

En effet, pour trouver leur courbe d'intersection, on peut éliminer  $\mathbf{V}$  entre (C) et (C'), et l'équation obtenue pourra tenir lieu de l'une d'elles.

On arrive ainsi à une équation qui se décompose en deux facteurs linéaires, savoir

$$H = ux + vy + wz - 1 = 0$$

et

$$dh_1(P + R) - hd_1(P_1 + R_1) = 0.$$

Donc, les quadriques (C) et (C') se coupent suivant deux courbes planes et sont, par conséquent, bitangentes.

IV. Lieu de la droite des contacts des quadriques (C) et (C') quand le plan considéré se déplace en restant parallèle à un plan tangent au cône. — Si  $\rho$  est une indéterminée, l'équation du plan mobile peut s'écrire

$$\begin{aligned} Ax + B\beta y + C\gamma z &= \rho, \\ Ax^2 - B\beta^2 + C\gamma^2 &= 0, \end{aligned}$$

avec les conditions

$$Ax = \rho u, \quad B\beta = \rho v, \quad C\gamma = \rho w;$$

ce qui réduit les relations (13) à

$$\begin{aligned} h + \frac{\rho d}{\rho} (ax + b\beta - c\gamma) &= h, \\ k_1 + \frac{\rho d_1}{\rho} (a_1x - b_1\beta + c_1\gamma) &= h_1. \end{aligned}$$

Cela posé, les équations de la droite des contacts des quadriques (C) et (C') étant

$$H = 0 \quad \text{et} \quad dh_1(P + R) - hd_1(P_1 + R_1) = 0$$

ou plus simplement

$$H = 0 \quad \text{et} \quad dh_1P - hd_1P_1 = 0.$$

il suffira d'expliciter ces équations

$$\begin{aligned} Ax + B\beta y + C\gamma z &= \rho, \\ \left[ dk_1 + \frac{2dd_1}{\rho}(a_1x + b_1\beta + c_1\gamma) \right] P \\ &- \left[ d_1k + \frac{2dd_1}{\rho}(ax + b\beta + c\gamma) \right] P_1 = 0 \end{aligned}$$

et d'éliminer  $\rho$  entre elles, ce qui donne immédiatement

$$(D) \quad \begin{cases} P[dk_1(Ax + B\beta y + C\gamma z) + 2dd_1(a_1x + b_1\beta + c_1\gamma)] \\ - P_1[d_1k(Ax + B\beta y + C\gamma z) + 2dd_1(ax + b\beta + c\gamma)] = 0. \end{cases}$$

équation d'une autre quadrique dont quatre génératrices rectilignes sont mises en évidence.

La question est complètement résolue.