

ÉMILE BOREL

Note sur un théorème de M. Humbert et sur un théorème de M. Fouret

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 123-129

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__123_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR UN THÉORÈME DE M. HUMBERT
ET SUR UN THÉORÈME DE M. FOURET;**

PAR M. ÉMILE BOREL.

I. — SUR UN THÉORÈME DE M. HUMBERT.

Considérons deux courbes algébriques déterminées par leurs équations tangentielles

$$(1) \quad \begin{cases} f(u, v, w) = 0, \\ \varphi(u, v, w) = 0, \end{cases}$$

et cherchons la somme V des angles que font leurs tangentes communes avec l'axe des x , les coordonnées étant supposées rectangulaires.

Pour avoir les directions des tangentes communes, éliminons w entre les équations (1); nous obtenons l'équation

$$(2) \quad R(u, v) = 0.$$

Le résultat $R(u, v)$ étant homogène par rapport à u et v , les valeurs de $-\frac{u}{v}$, racines de l'équation (2), sont les tangentes trigonométriques des angles que font avec l'axe des x les tangentes communes aux deux courbes.

Si l'on pose

$$R(u, v) \equiv A_0 u^m + A_1 u^{m-1} v + A_2 u^{m-2} v^2 + \dots + A_m v^m,$$

on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \dots}{A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + \dots}.$$

On peut remarquer que, si l'on pose

$$R(1, i) = M + N i,$$

on en déduit aisément

$$\operatorname{tang} V = \frac{N}{M}.$$

Or, pour calculer $R(1, i)$, il suffit d'éliminer w entre les équations

$$(3) \quad \begin{cases} f(1, i, w) = 0, \\ \varphi(1, i, w) = 0. \end{cases}$$

Il résulte de ce qui précède que l'angle V ne dépend que des deux équations précédentes; il ne change évidemment pas si l'on remplace les équations (1) par les suivantes

$$(4) \quad \begin{cases} f(u, v, w) + (u^2 + v^2) f_1(u, v, w) = 0, \\ \varphi(u, v, w) + (u^2 + v^2) \varphi_1(u, v, w) = 0, \end{cases}$$

f_1 et φ_1 étant des polynômes homogènes. On obtient ainsi ce théorème, trouvé par M. Humbert, d'une manière toute différente :

La somme des angles que font avec un axe fixe les tangentes communes à deux courbes algébriques ne change pas quand on remplace ces courbes par des courbes homofocales.

En particulier, on peut les remplacer par leurs foyers réels; les tangentes communes sont alors les droites que joignent, de toutes les manières possibles, les foyers

réels. La deuxième partie du problème proposé, en 1889, à l'École Polytechnique n'est qu'un cas particulier de cette dernière remarque.

II. — SUR UN THÉORÈME DE M. FOURET.

1. *Étant données deux courbes algébriques variables, mais rencontrant chacune les axes de coordonnées en des points déterminés; le produit des coefficients angulaires des droites qui joignent l'origine à leurs points d'intersection est constant.*

On peut énoncer ce théorème d'une autre manière, se prêtant mieux à une transformation, en introduisant une troisième droite arbitraire passant par l'origine; le coefficient angulaire d'une quatrième droite variable ne diffère que par un facteur constant du rapport anharmonique qu'elle forme avec les trois premières. On obtient ainsi ce nouvel énoncé :

Étant données deux courbes algébriques variables, mais rencontrant chacune les axes de coordonnées en des points déterminés, le produit des rapports anharmoniques formés par les droites joignant l'origine à leurs points d'intersection, avec les axes et une droite fixe passant par leur point de concours, est constant.

Le théorème corrélatif est le suivant :

Lorsque les tangentes, issues de deux points fixes à deux courbes algébriques variables, sont déterminées, le produit des rapports anharmoniques que forment avec ces deux points fixes et un troisième point fixe arbitraire situé sur la droite qui les joint les divers points de rencontre de leurs tangentes communes avec cette droite, est déterminé.

2. Pour démontrer directement ce dernier théorème, il suffit de se donner les équations des deux courbes variables en coordonnées tangentielles, les deux points fixes étant deux sommets du triangle de référence. Ces équations seront de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} f(u, v, w) + uv f_1(u, v, w) = 0, \\ \varphi(u, v, w) + uv \varphi_1(u, v, w) = 0, \end{cases}$$

les polynômes f et φ étant déterminés, f_1 et φ_1 étant variables. On a l'équation des points d'intersection de leurs tangentes communes avec la droite $(u=0, v=0)$, en éliminant w entre les équations précédentes; soit

$$R(u, v) = 0$$

l'équation ainsi obtenue. Le produit des rapports anharmoniques considérés est égal, à un facteur constant près, au quotient des coefficients des plus hautes puissances de u et de v , c'est-à-dire au quotient

$$R(0, v) : R(u, 0).$$

Or on peut obtenir $R(0, v)$, en annulant u dans les équations (1) et en éliminant w entre les deux équations

$$\begin{aligned} f(0, v, w) &= 0, \\ \varphi(0, v, w) &= 0. \end{aligned}$$

et, de même, $R(u, 0)$ peut être obtenu en éliminant w entre les deux équations

$$\begin{aligned} f(u, 0, w) &= 0, \\ \varphi(u, 0, w) &= 0; \end{aligned}$$

ce qui prouve que $R(0, v)$ et $R(u, 0)$ sont indépendants de $f_1(u, v, w)$ et de $\varphi_1(u, v, w)$, et, par suite, le théorème est démontré.

3. Si l'on suppose que les deux points fixes sont les points cycliques, chacun des rapports anharmoniques considérés a pour logarithme l'angle de la tangente commune correspondante avec un axe fixe, à un facteur constant près. Le produit des rapports anharmoniques étant constant, la somme de leurs logarithmes est constante, et l'on retrouve ainsi ce théorème :

La somme des angles, que font avec un axe fixe les tangentes communes à deux courbes algébriques, est déterminée lorsque la position de leurs foyers est déterminée.

C'est le théorème de M. Humbert.

4. On peut généraliser le théorème de M. Fouret, en remplaçant les droites fixes par des courbes algébriques quelconques.

Considérons un faisceau linéaire de courbes

$$\varphi + \lambda\varphi_1 = 0.$$

On peut appeler *rapport anharmonique* de quatre courbes de ce faisceau, le rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes de λ ; ce rapport est égal au rapport anharmonique des tangentes à ces quatre courbes, en l'un quelconque de leurs points communs. Cela posé, on a ce théorème :

Lorsque les points d'intersection de deux courbes algébriques variables avec deux des courbes d'un faisceau linéaire sont déterminés, le produit des rapports anharmoniques que forment avec ces deux courbes-là et une troisième courbe fixe quelconque du faisceau les diverses courbes du faisceau qui passent chacune par l'un des points d'intersection des courbes variables est aussi déterminé.

Soient, en effet,

$$(1) \quad f + \varphi \varphi_1 \psi = 0,$$

$$(2) \quad f_1 + \varphi \varphi_1 \psi_1 = 0$$

les équations des courbes variables,

$$(3) \quad \varphi + \lambda \varphi_1 = 0$$

étant l'équation générale des courbes du faisceau; f et f_1 sont déterminés, ψ et ψ_1 sont variables.

Les rapports anharmoniques considérés sont proportionnels aux valeurs de λ , correspondant aux courbes du faisceau (3) qui passent par les points d'intersection des courbes (1) et (2). Pour former l'équation donnant ces valeurs de λ , il suffit d'éliminer x, y, z entre les équations (1), (2), (3), et le théorème énoncé revient à ceci : le produit des racines de l'équation en λ obtenue est indépendant des coefficients de ψ et de ψ_1 . Il suffit de montrer que les termes extrêmes de l'équation en λ , ordonnée suivant les puissances décroissantes par exemple, ne dépendent pas de ces coefficients.

En effet, supposons, par exemple, que le terme constant de l'équation renferme un coefficient de ψ ; nous pourrions résoudre par rapport à ce coefficient l'équation obtenue en égalant à zéro le terme considéré; ce qui revient à dire que, pour une valeur particulière de ce coefficient de ψ , l'équation en λ aurait une racine nulle, et, par conséquent, les trois équations

$$\begin{aligned} f + \varphi \varphi_1 \psi &= 0, \\ f_1 + \varphi \varphi_1 \psi_1 &= 0, \\ \varphi &= 0 \end{aligned}$$

auraient une solution commune; il en serait de même des trois équations

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad \varphi = 0,$$

ce qui ne peut être si l'on n'a fait aucune hypothèse sur les coefficients de f, f_1, φ .

On verrait de la même manière que le coefficient de la plus haute puissance de λ est indépendant de ψ et de ψ_1 . Le théorème est donc démontré.