

E. AMIGUES

Théorème de d'Alembert

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 116-118

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__116_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE D'ALEMBERT;

PAR M. E. AMIGUES.

Soit $f(z)$ un polynôme à coefficients réels ou imaginaires. On donne à z toutes les valeurs réelles ou imaginaires, et soit z_0 la valeur pour laquelle ou l'une des valeurs pour lesquelles le module de $f(z)$ est le plus petit.

Changeons de variable, en posant

$$z = z_0 + u;$$

nous avons alors

$$f(z) = f(z_0 + u) = a_0 + b_0 \sqrt{-1} + \Sigma u^p (a_p + b_p \sqrt{-1}),$$

p étant un entier positif au moins égal à 1, et $a_0 + b_0 \sqrt{-1}$ représentant $f(z_0)$.

Cela posé, je dis que l'on a

$$a_0 + b_0 \sqrt{-1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(z_0) = 0,$$

ou qu'à défaut l'on a, pour toutes les valeurs de p ,

$$a_p = 0, \quad b_p = 0.$$

En d'autres termes, l'équation

$$f(z) = 0$$

admet une racine, à moins que le polynôme $f(z)$ ne se réduise à une constante.

Soit, en effet, $a_0 + b_0 \sqrt{-1} \neq 0$. Le carré du module de $f(z_0)$ est $a_0^2 + b_0^2$. Nous savons que le carré M^2 du

module de $f(z_0 + u)$ ne peut pas être inférieur à $a_0^2 + b_0^2$. Calculons M^2 . Pour cela, posons

$$u = \rho(\cos \omega + \sqrt{-1} \sin \omega),$$

afin de séparer dans $f(z_0 + u)$ la partie réelle et la partie imaginaire. On a alors

$$f(z_0 + u) = a_0 + \Sigma \rho^p (a_p \sin p \omega - b_p \cos p \omega) + \sqrt{-1} [b_0 + \Sigma \rho^p (a_p \sin p \omega + b_p \cos p \omega)];$$

on a alors

$$M^2 = [a_0 + \Sigma \rho^p (a_p \cos p \omega - b_p \sin p \omega)]^2 + [b_0 + \Sigma \rho^p (a_p \sin p \omega + b_p \cos p \omega)]^2.$$

Soit i la plus petite valeur de p , pour laquelle les coefficients a_p et b_p ne sont pas nuls tous deux. On a alors, en ordonnant M^2 par rapport aux puissances ascendantes de ρ ,

$$M^2 = a_0^2 + b_0^2 + 2\rho^i (a_0 a_i \cos i \omega - a_0 b_i \sin i \omega + b_0 a_i \sin i \omega + b_0 b_i \cos i \omega) + \dots$$

L'ensemble des termes qui suivent $a_0^2 + b_0^2$ ne peut pas être négatif. Donc le coefficient de ρ^i ne peut pas l'être. J'en conclus que ce coefficient est nul pour toute valeur de ω ; car, s'il n'était pas nul pour $\omega = \omega_1$, il aurait des signes contraires pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_1 + \frac{\pi}{i}$.

Cette identité en ω se traduit par les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} a_0 a_i + b_0 b_i &= 0, \\ b_0 a_i - a_0 b_i &= 0, \end{aligned}$$

qui n'ont d'autre solution que

$$a_i = 0, \quad b_i = 0.$$

On prouvera alors que l'on a, de même,

$$a_{i+1} = 0, \quad b_{i+1} = 0,$$

et toujours ainsi.

Remarque I. — La démonstration suppose que la valeur z_0 est finie. Or on sait que, lorsque la variable z est infinie, le module de $f(z)$ est lui-même infini.

Remarque II. — On s'est appuyé sur ce principe évident et que, en tout cas, on peut démontrer en toute rigueur : lorsqu'on a des nombres positifs en nombre fini ou infini, ou bien l'un d'eux est plus petit que tous les autres, ou bien plusieurs sont égaux entre eux et moindres que tous les autres, ou bien une infinité de ces nombres sont égaux entre eux et inférieurs à tous les autres, ou enfin on peut calculer deux nombres aussi rapprochés qu'on veut et entre lesquels sont compris les nombres les plus petits. On démontrerait ce principe comme j'ai démontré, dans mes *Leçons d'Algèbre*, le théorème suivant : *Une suite illimitée de nombres croissants qui demeurent inférieurs à un nombre donné est une suite convergente.*