

JOSEPH JOFFROY

Nouveau théorème sur les progressions arithmétiques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8 (1889), p. 85-88

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8_85_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVEAU THÉORÈME SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES;

PAR M. JOSEPH JOFFROY,
Professeur au lycée de Nantes.

Un de mes élèves, *Gaston Brunet* (classe de 4^e année d'Enseignement spécial) a le mérite d'avoir remarqué par des essais la propriété numérique suivante :

Soit les progressions

$$\div 1.3.5.7.9.11.13\dots$$

$$\div 1 \quad 5 \quad 9 \quad 13\dots$$

Le premier terme de la dernière est le cube du premier terme de la première; la somme des trois termes suivants (5, 9, 13) est le cube du terme 3, la somme des cinq termes suivants est le cube du terme 5, etc.

Il a été conduit à cette relation par la même relation connue sur les progressions

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad \dots$$

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad \dots$$

Cette propriété et celle que Brunet a trouvée sont des cas

particuliers du théorème suivant auquel elles m'ont conduit :

Soient

$$a.b.c.d.e.f\dots k.l(l+R)\dots$$

une progression arithmétique à termes entiers et soient

$$a.c.e.g\dots k(l+R)\dots$$

la progression formée par les termes de rang impair de l'autre; je décompose la seconde en groupes de $a, b, c, d, \dots, l, (l+R)$ termes : la somme des termes du premier groupe vaut le cube de a , la somme des termes du second groupe vaut le cube de b , ..., la somme des termes du $(n+1)$ groupe vaut le cube de $l+R$, à la seule condition que le terme a soit l'unité ou à la seule condition que $R = a$.

Démonstration. — Le premier terme du groupe qui contient $l+R$ termes de la seconde progression est précédé par

$$a + b + c + \dots + l \quad \text{ou} \quad (a + l) \frac{n}{2} \text{ termes.}$$

Je remplace n par sa valeur tirée de la formule connue

$$l = a + (n - 1)R$$

et je trouve que le nombre des termes qui précèdent ce terme est

$$\frac{(a + l)(l - a + R)}{2R}.$$

Ce terme vaut donc

$$a + (a + l)(l - a + R).$$

Le dernier terme du groupe considéré vaut

$$a + (a + l)(l - a + R) + (l + R - 1)2R,$$

et la somme des termes de ce groupe

$$[a + (a + l)(l - a + R) + (l + R - 1)R](l + R).$$

expression qui peut s'écrire

$$[(l + R)^2 + (1 - a)(a - R)](l + R)$$

et qui peut se réduire à $(l + R)^3$, soit lorsque $a = 1$,
soit lorsque $R = a$. c. q. f. d.

Application I. — La somme des cubes des n premiers
nombres impairs

$$1.3.5 \dots (2n - 1)$$

est égale à la somme des

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) \quad \text{ou} \quad n^2$$

premiers termes de la progression

$$1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \quad \dots, \quad l,$$

ou à

$$(1 + l) \frac{n^2}{2},$$

qui s'écrit, en remplaçant l par $1 + (n^2 - 1)4$,

$$(2n^2 - 1)n^2.$$

Application II. — La somme des cubes des n premiers
nombres pairs

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12, \quad \dots, \quad 2n$$

égale la somme des

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n \quad \text{ou} \quad n(n + 1)$$

premiers termes de la progression

$$2.6.10.14 \dots l$$

Elle vaut donc

$$(2 + l) \frac{n(n + 1)}{2}.$$

(88)

Substituant à l son expression

$$2 + [n(n+1) - 1] i.$$

j'obtiens, pour expression de la somme cherchée,

$$2n^2(n+1)^2.$$