

M. J. DOLBNIA

Sur l'analogie entre les fonctions elliptiques et trigonométriques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 459-471

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8_459_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ANALOGIE ENTRE LES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET TRIGONOMETRIQUES;

PAR M. J. DOLBIA, à Nijni-Novgorod.

1. Nous nous proposons de rechercher les fonctions transcendentes qui satisfont à l'équation

$$(1) \quad \frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u \tau^2 a} = \varphi(a) - \varphi(u).$$

Nous distinguerons deux cas : 1° lorsque $\varphi(u)$ a deux périodes (l'une réelle 2ω , l'autre imaginaire $2\omega'$), et 2° lorsque $\varphi(u)$ a une seule période réelle 2ω .

Premier cas. — Soit

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi(u), \quad \varphi(u+2\omega') = \varphi(u).$$

En transposant les lettres a et u , nous aurons.

$$(2) \quad \frac{\tau(u+a)\tau(a-u)}{\tau^2 u \tau^2 a} = \varphi(u) - \varphi(a).$$

En comparant (1) et (2), nous obtenons

$$\tau(a-u) = -\tau(u-a),$$

c'est-à-dire

$$\tau(-z) = -\tau(z),$$

d'où il suit que $\tau(u)$ est une fonction impaire de l'argument u .

Supposons

$$\lim(u-a) = 0,$$

alors

$$\lim \left| \frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u \tau^2 a} \right|_{u \rightarrow a} = 0;$$

donc

$$\lim [\tau(u-a)]_{u \rightarrow a} = 0,$$

(460)

c'est-à-dire

$$\tau(0) = 0.$$

En posant

$$u = a + 2m\omega,$$

où m est un nombre entier, nous avons

$$(3) \quad \frac{\tau(2a + 2m\omega) \tau(2m\omega)}{\tau^2(a + 2m\omega) \tau^2 a} = 0.$$

Si $\tau(u)$ est une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan, de l'équation (3) nous aurons

$$\tau(2m\omega) = 0.$$

D'une manière semblable, nous trouverons

$$\tau(2m'\omega') = 0;$$

par conséquent, tous les zéros de la fonction $\tau(u)$ sont compris dans la formule suivante

$$(4) \quad u = 2m\omega + 2m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

De l'équation (1) nous aurons

$$\frac{\tau(u+a)}{\tau^2 u \tau^2 a} \frac{\tau(u-a)}{u-a} = - \frac{\varphi(u) - \varphi(a)}{u-a}.$$

En posant ici

$$\lim(u-a) = 0,$$

et en rappelant que les deux fonctions $\tau(u)$ et $\varphi(u)$ doivent avoir des dérivées, nous obtiendrons

$$\frac{\tau(2u)}{\tau^3(u)} \tau'(0) = - \varphi'(u).$$

La constante $\tau'(0)$ est une quantité indéterminée. Nous prenons donc

$$\tau'(0) = 1;$$

alors

$$\varphi'(u) = - \frac{\tau(2u)}{\tau^3(u)}.$$

De là il suit que le développement de la fonction holomorphe $\tau(u)$, suivant les puissances ascendantes de l'argument, commence par la quantité u et aura la forme suivante

$$\tau(u) = u + \alpha_1 u^3 + \alpha_2 u^5 + \dots$$

Il est facile de constater que les infinis de la fonction $\varphi'(u)$ sont les solutions simultanées des deux équations

$$\tau(2u) = 0, \quad \tau^4(u) = 0;$$

donc $\varphi'(u)$ devient l'infini pour toutes les valeurs de l'argument renfermées dans la formule

$$u = m\omega + m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers pairs.

Les zéros de la fonction $\varphi'(u)$ sont les solutions de l'équation

$$\tau(2u) = 0;$$

si l'on y ajoute l'inégalité

$$\tau(u) \leq 0.$$

D'où il suit que les racines de l'équation

$$\varphi'(u) = 0$$

sont définies par la formule

$$u = (2m+1)\omega + (2m'+1)\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

Ainsi, dans l'intérieur du parallélogramme élémentaire $(2\omega, 2\omega')$, la fonction $\varphi'(u)$ a trois zéros

$$\omega, \quad \omega', \quad \omega + \omega'$$

et un seul infini

$$u = 0.$$

Il est facile de prouver que cet infini est triple. En

(462)

effet, de la formule

$$\varphi'(u) = -\frac{\tau(2u)}{\tau^2(u)},$$

il ressort que, u étant infiniment petit, la partie principale de $\varphi'(u)$ est

$$-\frac{2u}{u^2} = -\frac{2}{u}.$$

Ainsi $\varphi'(u)$ est la fonction méromorphe doublement périodique du troisième ordre.

En faisant dans l'équation (1)

$$\lim u = 0,$$

nous trouverons que la partie principale de $\varphi(u)$ sera

$$\frac{1}{u^2};$$

par conséquent,

$$\lim [\varphi(u)]_{u=0} = \infty.$$

D'où il suit que tous les infinis de $\varphi(u)$ sont renfermés dans la formule

$$u = 2m\omega + 2m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

A l'intérieur du parallélogramme élémentaire

$$(2\omega, 2\omega'),$$

la fonction $\varphi(u)$ a un seul infini

$$u = 0,$$

et cet infini est double. D'où il suit que $\varphi(u)$ a à l'intérieur du même parallélogramme deux zéros ⁽¹⁾.

(1) BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 241; 1875.

Il est évident que $\varphi(u)$ est la fonction méromorphe doublement périodique du deuxième ordre ⁽¹⁾.

2. Nommons

$$\varphi(\omega) = e_1, \quad \varphi(\omega + \omega') = e_2, \quad \varphi(\omega') = e_3,$$

et considérons les propriétés des binômes

$$(\varphi u - e_1), \quad (\varphi u - e_2), \quad (\varphi u - e_3).$$

Le zéro du binôme $(\varphi u - e_1)$ est

$$u = \omega;$$

la même valeur de l'argument annule la fonction

$$\frac{d}{du} [\varphi(u) - e_1] = \varphi'(u);$$

donc la fonction

$$(\varphi u - e_1)$$

a à l'intérieur du parallélogramme $(2\omega, 2\omega')$ un seul zéro

$$u = \omega,$$

et ce zéro est double. En outre, il est clair que

$$\varphi u - e_1$$

a un infini double

$$u = 0.$$

Par cette raison, le produit

$$(7) \quad (\varphi u - e_1)(\varphi u - e_2)(\varphi u - e_3)$$

a trois zéros doublés

$$u = \omega, \quad u = \omega + \omega', \quad u = \omega',$$

⁽¹⁾ *Ibid.*, p. 197.

et un seul infini sextuple

$$u = 0;$$

par conséquent, (7) est une fonction méromorphe, doublement périodique du sixième ordre.

La fonction

$$(\varphi' u)^2$$

possède ces mêmes zéros et ces mêmes infinis; par conséquent,

$$(\varphi' u)^2 = \Lambda(\varphi u - e_1)(\varphi u - e_2)(\varphi u - e_3) \quad (1),$$

où Λ est la quantité constante. En choisissant e_1, e_2, e_3 de manière que

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

nous parvenons à la fonction $p(u)$ de M. Weierstrass, définie par l'équation différentielle

$$(p' u)^2 = 4p^3 u - g_2 p u - g_3.$$

3. A l'aide de cette équation et du théorème d'Abel relativement à l'addition des arguments, il est facile d'employer les deux formules suivantes,

$$p(u + u_1) + pu + pu_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{p' u - p' u_1}{pu - pu_1} \right)^2,$$

$$\zeta(u + u_1) - \zeta u - \zeta u_1 = \frac{1}{2} \frac{p' u - p' u_1}{pu - pu_1} \quad (2),$$

où

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \int_0^u \left(\frac{1}{u^2} - pu \right) du.$$

En posant

$$u_1 = \omega,$$

(1) BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 242; 1875.

(2) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 29, 138; 1886.

nous aurons

$$(8) \quad \zeta(\omega + u) = \zeta u + \zeta(\omega) + \frac{1}{2} \frac{p'u}{pu - e_1}.$$

Occupons-nous maintenant de la détermination de la fonction holomorphe $\tau(u)$, qui satisfasse à l'équation transcendante

$$\frac{\tau(u + \alpha)\tau(u - \alpha)}{\tau^2(u)\tau^2(\alpha)} = p(\alpha) - p(u).$$

En y supposant

$$\alpha = \omega,$$

nous aurons

$$\frac{\tau(\omega + u)\tau(\omega - u)}{\tau^2 u \tau^2 \omega} = pu - e_1.$$

Les fonctions $\tau(\omega + u)$, $\tau(\omega - u)$ ont les mêmes zéros; posons donc

$$\tau(\omega + u) = \tau(\omega - u),$$

$$\tau(u + 2\omega) = -\tau u,$$

alors

$$\left\{ \frac{\tau(\omega + u)}{\tau u \tau \omega} \right\}^2 = pu - e_1,$$

d'où

$$\log \tau(\omega + u) - \log \tau u - \log \tau \omega = \frac{1}{2} \log(pu - e_1).$$

En différenciant cette équation relativement à u , nous trouverons

$$(9) \quad \frac{\tau'(\omega + u)}{\tau(\omega + u)} - \frac{\tau' u}{\tau u} = \frac{1}{2} \frac{p'u}{pu - e_1}.$$

Les équations (8) et (9) donnent

$$\frac{\tau'(\omega + u)}{\tau(\omega + u)} - \frac{\tau' u}{\tau u} = \zeta(\omega + u) - \zeta u - \zeta(\omega);$$

d'où il suit que les deux fonctions

$$\frac{\tau' u}{\tau u} \quad \text{et} \quad \zeta(u)$$

peuvent différer seulement par une fonction linéaire de l'argument, et par conséquent supposons

$$\frac{\tau' u}{\tau(u)} = \zeta(u) + 2\alpha u + \beta.$$

Mais $\frac{\tau' u}{\tau(u)}$ est une fonction impaire de l'argument, donc

$$\beta = 0,$$

et nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{\tau' u}{\tau(u)} &= \zeta u + 2\alpha u, \\ \frac{\tau'(u+\omega)}{\tau(u+\omega)} &= \zeta(u+\omega) + 2\alpha u + 2\alpha\omega,\end{aligned}$$

par conséquent

$$2\alpha\omega = -\zeta(\omega), \quad 2\alpha = -\frac{\zeta(\omega)}{\omega};$$

donc

$$\frac{\tau'(u)}{\tau(u)} = \frac{d}{du} \log \tau(u) = \zeta(u) - \frac{u\zeta(\omega)}{\omega}.$$

La fonction $\sigma(u)$ de M. Weierstrass se définit par l'équation

$$\frac{d}{du} \log \sigma(u) = \zeta(u),$$

d'où

$$\tau(u) = e^{\frac{-u^2\zeta(\omega)}{2\omega}} \sigma(u).$$

La fonction $\tau(u)$ diffère de la fonction $\mathfrak{S}_1(u)$ de Jacobi seulement par le facteur constant (1).

4. *Deuxième cas.* — Supposons que dans l'équation

$$-\frac{\tau(u+\alpha)\tau(u-\alpha)}{\tau^2(u)\tau^2(\alpha)} = \varphi(u) - \varphi(\alpha)$$

(1) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 251; 1886.
BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 465; 1875.

la fonction $\varphi(u)$ ait une seule et unique période réelle π . Par cette supposition, nous passons dans le domaine des fonctions trigonométriques. Il est facile de constater les propriétés suivantes :

a. La fonction $\tau(u)$ est impaire et $\varphi(u)$ paire.

b. Les zéros de $\tau(u)$ sont renfermés dans la formule

$$u = m\pi,$$

où m est un nombre entier arbitraire.

c. En posant

$$\tau'(0) = 1,$$

nous aurons

$$\varphi'(u) = \frac{\tau(2u)}{\tau'(u)};$$

d'où il résulte que les zéros de la fonction $\varphi'(u)$ sont

$$u = (2m+1)\frac{\pi}{2},$$

et les infinis sont

$$u = m\pi.$$

d. Comme $\tau(0) = 0$, $\tau(\pi) = 0$, $\tau'(0) = 1$, la fonction $\tau(u)$ a un *maximum* pour la valeur de l'argument renfermé dans les limites

$$0 < u < \pi,$$

d'où il suit que

$$\tau'(\pi) < 0.$$

Donc, d'après la continuité de $\tau(u)$, nous concluons que

$$\tau(\pi + u), \quad \tau(\pi - u)$$

ont des signes contraires. D'autre part, ces fonctions s'annulant toujours pour une même valeur de l'argument, nous pouvons supposer

$$\tau(\pi - u) = \Lambda \tau(\pi + u),$$

où A est une constante négative. Supposons $A = -1$, alors

$$\begin{aligned}\tau(\pi - u) &= -\tau(\pi + u), \\ \tau(u + 2\pi) &= \tau(u).\end{aligned}$$

c. Prenons maintenant l'équation

$$\varphi'(u) = -\frac{\tau(2u)}{\tau^3(u)}.$$

Pour la valeur infiniment petite de u , la partie principale de $\varphi'(u)$ est

$$-\frac{2}{u^3};$$

par conséquent, si $u > 0$, nous aurons

$$\lim(\varphi'u)_{u=0} = -\infty.$$

Pour $u = \frac{\pi}{2}$, la fonction $\varphi'(u)$ devient égale à zéro, d'où il suit que, dans les limites

$$0 < u < \frac{\pi}{2},$$

notre fonction reste négative.

Par cette raison,

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = -\frac{\tau(\pi - 2u)}{\tau^3\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} < 0,$$

et comme $\tau(\pi + 2u)$ et $\tau(\pi - 2u)$ ont des signes contraires, nous aurons

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2} + u\right) > 0.$$

Ainsi la fonction $\varphi'(u)$, dans les limites

$$\frac{\pi}{2} < u < \pi,$$

reste positive. Par conséquent $\varphi(u)$, pour $u = \frac{\pi}{2}$, atteint le *minimum*. Pour la valeur u infiniment petite, la partie principale de $\varphi(u)$ est $\frac{1}{u^2}$: donc

$$\lim(\varphi u)_{u \rightarrow 0} = +\infty.$$

Supposons le minimum de $\varphi(u) = m$, alors

$$\varphi(u) \dots m + 1$$

ne devient jamais nul pour les valeurs réelles de l'argument.

5. Nous considérons les deux fonctions trigonométriques

$$F(u) = [\varphi'(u)]^2$$

et

$$f(u) = (\varphi u - m + 1)^2 (\varphi u - m).$$

Entre les limites

$$0 < u < \pi,$$

les deux fonctions ont un seul infini $u = 0$ sextuple;

$F(u)$ a un zéro double $u = \frac{\pi}{2}$; cette même valeur de l'argument satisfait à l'équation

$$\varphi(u) - m = 0,$$

et, comme

$$\frac{d}{du}(\varphi u - m) = \varphi'(u)$$

s'annule pour la même valeur de l'argument, nous concluons que $f(u)$ a le zéro double

$$u = \frac{\pi}{2}$$

entre les mêmes limites. Les deux fonctions $F(u)$, $f(u)$

possèdent une même période, et, par conséquent,

$$F(u) = \Lambda \varphi(u);$$

la constante Λ est arbitraire. Posons $\Lambda = 4$, alors

$$\begin{aligned} (\varphi' u)^2 &= 4(\varphi u - m + 1)^2(\varphi u - m), \\ \varphi'(u) &= -2(\varphi u - m + 1)\sqrt{\varphi u - m}. \end{aligned}$$

Posons $\varphi(u) = x$, alors

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= -2(x - m + 1)\sqrt{x - m}, \\ du &= -\frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}}, \\ u &= -\int_m^x \frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}} + C. \end{aligned}$$

Mais, pour $x = \varphi(u) = m$, nous aurons

$$u = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\begin{aligned} C &= \frac{\pi}{2}, \\ \int_m^x \frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}} &= \frac{\pi}{2} - u. \end{aligned}$$

En faisant $\sqrt{x - m} = \xi$, nous aurons

$$x = m + \xi^2, \quad dx = 2\xi d\xi, \quad x - m + 1 = 1 + \xi^2,$$

$$\frac{\pi}{2} - u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \text{arc tang } \sqrt{x - m},$$

$$\sqrt{x - m} = \cot u,$$

$$x = m + \cot^2 u,$$

$$\varphi(u) = m + \cot^2 u.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \cot^2 a - \cot^2 u,$$

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u \tau^2 a} = \frac{\sin(u+a)\sin(u-a)}{\sin^2 u \sin^2 a},$$

d'où il suit que

$$\tau(u) = \sin u,$$

$$\frac{d}{du} \log \tau u = \cot u.$$

Ainsi l'analogue de $p(u)$ de *M. Weierstrass* est $(u + \cot^2 u)$, l'analogue de $\zeta(u)$ est $\cot u$, l'analogue de $\vartheta(u)$ est $\sin u$.

6. De tout ce qui précède, il découle naturellement que l'équation à trois termes ne peut pas être considérée comme caractéristique pour les fonctions elliptiques, car elle s'étend facilement aux fonctions trigonométriques. En effet, en posant

$$\cot^2 a = A, \quad \cot^2 b = B,$$

nous aurons

$$\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin^2 a \sin^2 b} = B - A.$$

De l'identité

$$(B-A)(D-C) + (B-C)(A-D) + (B-D)(C-A) = 0,$$

il découle l'équation

$$\begin{aligned} & \sin(a+b)\sin(a-b)\sin(c+d)\sin(c-d) \\ & + \sin(c+b)\sin(c-b)\sin(d-a)\sin(d+a) \\ & + \sin(d+b)\sin(d-b)\sin(a+c)\sin(a-c) = 0, \end{aligned}$$

qui n'est autre chose que l'équation à trois termes, caractérisant les fonctions trigonométriques aussi bien que les fonctions elliptiques.