Note sur un système de deux courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 325-329

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__325_1>

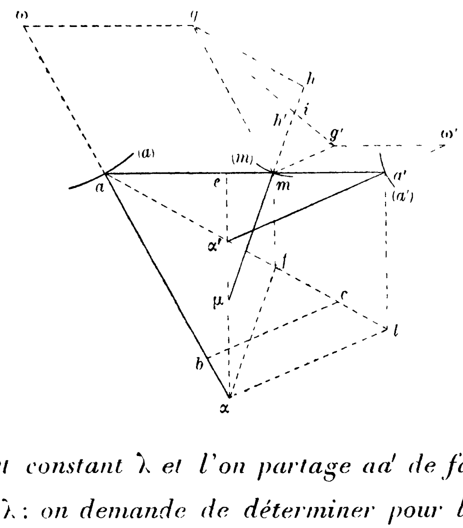
NOTE SUR UN SYSTÈME DE DEUX COURBES PLANES;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Je me propose de résoudre géométriquement des problèmes traités par M. Laisant dans la Communication qu'il a faite à la *Société mathématique de France*, le 18 juillet 1888, sous le titre même que j'ai conservé pour cette courte Note.

On déplace une droite aa' (fig. 1) de façon que les arcs parcourus par ses extrémités soient dans un

Fig. 1.



rapport constant λ *et l'on partage aa' de façon que* $\frac{am}{ma'} = \lambda$: *on demande de déterminer pour la courbe*

(m), lieu des points tels que m, sa normale en m et son rayon de courbure.

Commençons par construire le point e où la droite mobile aa' touche son enveloppe. De ce point, supposé connu, élevons une perpendiculaire à aa'. Désignons par α et α' les points de rencontre de cette perpendiculaire et des normales menées en a et a' aux courbes (a) et (a') décrites par ces points. Si $d(a)$ et $d(a')$ désignent les arcs infiniment petits parcourus simultanément par a et a' pendant le déplacement de aa', on a

$$\frac{d(a)}{d(a')} = \lambda.$$

Mais, en vertu d'une formule connue (1),

$$\frac{d(a)}{d(a')} = \frac{a\alpha}{a'\alpha'};$$

donc

$$\frac{a\alpha}{a'\alpha'} = \lambda.$$

On a donc le point e en cherchant le pied d'une perpendiculaire à aa' qui détermine sur les normales à (a) et (a') des segments $a\alpha$, $a'\alpha'$ dont le rapport est donné.

Pour résoudre ce problème de Géométrie élémentaire, prenons le point quelconque b sur $a\alpha$ et, parallèlement à la normale $a'\alpha'$, menons la droite bc sur laquelle nous prenons le point c de manière que $\frac{ab}{bc} = \lambda$.

La droite ac coupe en l la perpendiculaire $a'l$ à aa'. La parallèle $l\alpha$ à la normale $a'\alpha'$ coupe $a\alpha$ au point α dont la projection sur aa' est le point e cherché.

Il y a deux solutions puisque l'on peut porter le seg-

(1) Formule 3, page 205 de la deuxième édition du *Cours de Géométrie descriptive* de M. Mannheim

ment bc dans le sens contraire où il a été porté sur la figure.

Ces deux solutions correspondent aux cas où, (a) étant parcouru par a dans un même sens, le point a' décrit (a') successivement dans les deux sens opposés.

Normale en m à la courbe (m). — Puisque les points tels que m partagent toujours aa' dans le même rapport λ, on sait [1] qu'on obtient la normale demandée en joignant le point m au point μ qui est tel que

$$\frac{\alpha\mu}{\mu\alpha'} = \frac{am}{ma'}.$$

Menons mf perpendiculairement à aa'. Cette droite coupe al au point f et l'on a

$$\frac{af}{fl} = \lambda.$$

Mais l'on a aussi

$$\frac{a\alpha}{\alpha l} = \lambda :$$

donc la droite αf est la bissectrice de l'angle $l\alpha a$.

On a

$$mf = a'l\,\frac{am}{aa'} = \alpha\alpha'\,\frac{\alpha\mu}{\alpha\alpha'} = \alpha\mu.$$

Ainsi $mf = \alpha\mu$; par suite, $m\mu$ est parallèle à la bissectrice αf : donc

La normale demandée est également inclinée sur les normales $a\alpha$, $a'\alpha'$ [2].

Rayon de courbure de la courbe (m) pour le point m. — Pour un déplacement de aa', l'angle de $a\alpha$ et de $m\mu$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 172.

[2] Si a' parcourt (a') dans le sens opposé à celui qui a été adopté, la normale est perpendiculaire à celle qui est tracée sur la figure.

varie. La variation de cet angle est égale à la différence des variations angulaires de $a\alpha$ et $m\mu$. Ces variations angulaires sont égales à $\frac{d(a)}{\rho_a}$ et $\frac{d(m)}{\rho_m}$, en appelant ρ_a et ρ_m les rayons de courbure de (a) et de (m).

Puisque la normale $m\mu$ fait des angles égaux avec $a\alpha$ et $a'\alpha'$, écrivons que les variations de ces angles sont égales ; on a

$$\frac{d(a)}{\rho_a} - \frac{d(m)}{\rho_m} = \frac{d(m)}{\rho_m} - \frac{d(a')}{\rho_{a'}},$$

d'où

$$\frac{d(a)}{d(m)\rho_a} + \frac{d(a')}{d(m)\rho_{a'}} = \frac{2}{\rho_m},$$

$$\frac{a\alpha}{m\mu.\rho_a} + \frac{a\alpha'}{m\mu.\rho_{a'}} = \frac{a}{\rho_m}.$$

Du point m, menons mg égal et parallèle à $a\omega$, rayon de courbure de (a) et du point g, menons gh parallèlement à al. Les triangles semblables $a\alpha f$, gmh donnent

$$\frac{1}{mh} = \frac{a\alpha}{\alpha f.mg} = \frac{a\alpha}{m\mu.\rho_a}.$$

De même,

$$\frac{1}{mh'} = \frac{a'\alpha'}{m\mu.\rho_{a'}}.$$

La relation précédente peut donc s'écrire

$$\frac{1}{mh} + \frac{1}{mh'} = \frac{2}{\rho_m}.$$

Si l'on prend en i l'harmonique conjuguée de m par rapport à h et h', il résulte de cette dernière relation que

$$\rho_m = mi.$$

Comme la droite mi est la bissectrice de l'angle $g'mg$, on obtient le point i à la rencontre de la normale $m\mu$ et de la droite gg' ; on peut donc dire :

Du point m on mène mg égal et parallèle au rayon *de courbure* $a\omega$ *et* mg' *égal et parallèle au rayon de courbure* $a'\omega'$: *la droite* gg' *coupe la normale* $m\mu$ *au centre de courbure demandé.*