

LEMAIRE

Note sur la question du concours général de mathématiques spéciales en 1888

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 243-246

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8_243_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LA QUESTION DU CONCOURS GÉNÉRAL
DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES EN 1888;**

PAR M. LEMAIRE,
Professeur au lycée de Lorient.

Transformant en coordonnées polaires l'équation de la courbe C, nous obtenons une équation de la forme

$$\rho^4 - 2F(\omega)\rho^2 + K = 0.$$

K étant indépendant de ω . Le produit des racines de cette équation est constant. Nous en concluons que la

courbe C est transformable en elle-même par rayons vecteurs réciproques, l'origine d'inversion étant le centre O de l'ellipse donnée, et la puissance $\sqrt{K}$. On sait que les courbes qui jouissent de cette propriété, auxquelles on a donné le nom de *courbes anallagmatiques*, sont des enveloppes de cercles coupant orthogonalement un cercle fixe, réel ou imaginaire, et ayant leurs centres sur une courbe fixe, dite *déférente*. Il est facile de trouver, dans le cas qui nous occupe, le cercle fixe et la déférente : celle-ci est une conique.

Cherchons, en effet, l'enveloppe d'un cercle

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 - \rho^2 = 0$$

coupant orthogonalement le cercle fixe

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

et ayant son centre sur la conique

$$Ax^2 + By^2 - 1 = 0;$$

ρ , p , q satisfont aux relations

$$Ap^2 + Bq^2 - 1 = 0,$$

$$p^2 + q^2 = R^2 + \rho^2.$$

L'équation du cercle variable peut s'écrire

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 - p^2 - q^2 + R^2 = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + R^2 = 0,$$

avec la condition

$$Ap^2 + Bq^2 - 1 = 0.$$

Éliminons p et q entre ces deux relations et

$$\frac{Ap}{x} = \frac{Bq}{y};$$

nous avons

$$\frac{Ap}{x} = \frac{Bq}{y} = \frac{\gamma(Ap^2 + Bq^2)}{2(px + qy)} = \frac{2}{x^2 + y^2 + R^2};$$

d'où

$$p = \frac{2x}{A(x^2 + y^2 + R^2)},$$

$$q = \frac{2y}{B(x^2 + y^2 + R^2)}.$$

L'enveloppe a donc pour équation

$$(1) \quad (x^2 + y^2 + R^2)^2 - 4 \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} \right) = 0.$$

On trouve bien une équation de la forme de (C)

$$(C) \quad (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 - \frac{4}{\tan^2 \theta} (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) = 0.$$

L'identification donne

$$R^2 = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + \frac{4}{\tan^2 \theta} a^2 b^2}.$$

$$\frac{2}{A} = (a^2 + b^2) + \frac{2}{\tan^2 \theta} b^2 - R^2,$$

$$\frac{2}{B} = (a^2 + b^2) + \frac{2}{\tan^2 \theta} a^2 - R^2.$$

Pour simplifier l'écriture, conservons les notations (A, B, R). Tout ce que nous dirions de la courbe (1) s'appliquera à la courbe (C). (1) admet pour asymptotes les droites isotropes du plan. Donc on peut dire que tout cercle du plan a avec cette courbe aux points cycliques une bitangente imaginaire.

Un cercle la touchera donc en quatre points, s'il a avec elle deux points de contact à distance finie.

Or les cercles qui ont pour enveloppe (1) lui sont pré-

cisément bitangents : tout revient donc à chercher combien de ces cercles sont tangents à une droite donnée

$$(D) \quad mx + ny + 1 = 0.$$

La condition de contact du cercle variable

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + R^2 = 0$$

avec la droite D est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -p & m \\ 0 & 1 & -q & n \\ -p & -q & R^2 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(np - mq)^2 - 2(mp + nq) = (m^2 + n^2)R^2 + 1.$$

Finalement, nous voyons que le centre de tout cercle répondant à la question se trouve à la fois sur les deux coniques

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 - 1 &= 0, \\ (nx - my)^2 - 2(mx + ny) &= (m^2 + n^2)R^2 + 1. \end{aligned}$$

Donc il y a au plus quatre cercles pareils.