

V. JAMET

Sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8 (1889), p. 228-232

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8_228_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES;

PAR M. V. JAMET.

1. LEMME. — *Le polynôme entier, de degré n , $F(x)$, est identiquement nul, si l'on peut trouver des quantités $a, b, c, \dots, l$, telles que l'on ait identiquement*

$$\begin{array}{llll} F(a) = 0, & F'(a) = 0, & \dots, & F^{(\alpha-1)}(a) = 0, \\ F(b) = 0, & F'(b) = 0, & \dots, & F^{(\beta-1)}(b) = 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots, \\ F(l) = 0, & F'(l) = 0, & \dots, & F^{(\lambda-1)}(l) = 0 \end{array}$$

et

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda > n;$$

car, s'il en était autrement, l'équation $F(x) = 0$ aurait α racines égales à a , β racines égales à b , $\dots$, λ racines égales à l ; par conséquent, plus de racines qu'il n'y a d'unités dans son degré.

Il s'ensuit que deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$, dont le premier est de degré n , le second de degré m , sont

identiques, si l'on a

$$\begin{aligned} f(a) &= \varphi(a), & f'(a) &= \varphi'(a), & \dots & f^{(\alpha-1)}(a) = \varphi^{(\alpha-1)}(a), \\ f(b) &= \varphi(b), & f'(b) &= \varphi'(b), & \dots & f^{(\beta-1)}(b) = \varphi^{(\beta-1)}(b), \\ \dots & \dots, & \dots & \dots, & \dots & \dots \\ f(l) &= \varphi(l), & f'(l) &= \varphi'(l), & \dots & f^{(\lambda-1)}(l) = \varphi^{(\lambda-1)}(l) \end{aligned}$$

et

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda \geq n \geq m;$$

car la fonction entière $f(x) - \varphi(x)$ est alors identiquement nulle.

2. Cela posé, soit $f(x)$ un polynôme entier de degré inférieur au degré de la fonction entière $F(x)$ définie comme il suit :

$$F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda.$$

Soient aussi

$$\varpi_\alpha(x) = (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-l)^\lambda,$$

$$\varpi_\beta(x) = (x-a)^\alpha (x-c)^\gamma \dots (x-l)^\lambda,$$

$$\dots \dots \dots$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{F(x)} &= \frac{1}{1.2.3 \dots \alpha-1} D_a^{\alpha-1} \left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_\alpha(a)} \right] \\ &+ \frac{1}{1.2.3 \dots \beta-1} D_b^{\beta-1} \left[\frac{f(b)}{(x-b)\varpi_\beta(b)} \right] \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ \frac{1}{1.2.3 \dots \lambda-1} D_l^{\lambda-1} \left[\frac{f(l)}{(x-l)\varpi_\lambda(l)} \right]. \end{aligned}$$

La fonction $\varphi(x)$, définie par cette égalité, est une fonction entière, car l'expression

$$(1) \quad D_a^{\alpha-1} \left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_\alpha(a)} \right]$$

est égale à une fonction rationnelle de x , dont le dénominateur est $(x-a)^\alpha$. Le produit de cette expression

par $F(x)$ est donc une fonction entière de x , et il en est de même pour tous les autres termes du second membre de l'égalité précédente; il faut remarquer, en outre, que la fonction $\varphi(x)$ est d'un degré inférieur à celui de $F(x)$; car le numérateur de la fraction rationnelle équivalente à (1) est d'un degré inférieur à α ; de même, le deuxième terme est une fonction rationnelle, dont le numérateur est d'un degré inférieur à β ,

3. Soit maintenant p un nombre entier inférieur à α ; proposons-nous de calculer la valeur que prend $\varphi^{(p)}(x)$, c'est-à-dire la dérivée d'ordre p de $\varphi(x)$ quand on y remplace x par a .

Observons, à cet effet, que la dérivée d'ordre p de l'expression

$$\frac{1}{1.2.3\dots\beta-1} D_b^{\beta-1} \left[\frac{f(b)}{(x-b)\varpi_\beta(b)} \right] F(x)$$

sera nulle, ainsi que les dérivées des expressions analogues, quand on y remplacera x par a ; il y aura exception pour l'expression suivante :

$$(2) \quad \frac{1}{1.2.3\dots\alpha-1} D_a^{\alpha-1} \left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_\alpha(a)} \right] F(x).$$

Je dis que celle-ci sera égale à $f^{(p)}(a)$. En effet, si dans l'expression (2) on applique à la dérivée d'ordre $\alpha-1$ qu'elle renferme la formule qui fait connaître les dérivées successives du produit de deux fonctions données; si l'on pose

$$\frac{f(a)}{\varpi_\alpha(a)} = \psi(a),$$

et si l'on multiplie tous les termes du développement obtenu par $F(x)$, ou $(x-a)^2\varpi_\alpha(x)$, on voit que cette

expression est égale à

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \psi(a) \varpi_a(x) + \psi'(a) \frac{x-a}{1} \varpi_a(x) \\ & + \psi''(a) \frac{(x-a)^2}{1.2} \varpi_a(x) + \dots \\ & + \psi^{(i-1)}(a) \frac{(x-a)^{i-1}}{1.2.3\dots i-1} \varpi_a(x). \end{aligned} \right.$$

Dans ce dernier développement, considérons le terme

$$\psi^{(i)}(a) \frac{(x-a)^i}{1.2.3\dots i} \varpi_a(x)$$

et observons que sa dérivée d'ordre p est nulle pour $x = a$, si l'on suppose $i > p$. Dans le cas contraire, elle est égale à

$$\frac{\psi^{(i)}(a)}{1.2.3\dots i} \left[(x-a)^i \varpi_a^{(p)}(x) + \frac{p}{1} i(x-a)^{i-1} \varpi_a^{(p-1)}(x) + \dots \right. \\ \left. - p(p-1)(p-2)\dots(p-i+1) \varpi_a^{(p-i)}(x) \right].$$

Pour $x = a$, elle se réduit à

$$\frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{1.2.3\dots i} \psi^{(i)}(a) \varpi_a^{(p-i)}(a).$$

Donc, pour $x = a$, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la fonction (3) se réduit à

$$\psi(a) \varpi_a^{(p)}(a) + \frac{p}{1} \psi'(a) \varpi_a^{(p-1)}(a) \\ + \frac{p(p-1)}{1.2} \psi''(a) \varpi_a^{(p-2)}(a) + \dots + \psi^{(p)}(a) \varpi_a(a),$$

c'est-à-dire à

$$D_p^p [\psi(a) \varpi_a(a)],$$

ou $f^{(p)}(a)$.

4. On conclut de là les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= f(a), & \varphi'(a) &= f'(a), & \varphi''(a) &= f''(a), & \dots & \varphi^{(\alpha-1)}(a) = f^{(\alpha-1)}(a), \\ \varphi(b) &= f(b), & \varphi'(b) &= f'(b), & \varphi''(b) &= f''(b), & \dots & \varphi^{(\beta-1)}(b) = f^{(\beta-1)}(b), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \varphi(l) &= f(l), & \varphi'(l) &= f'(l), & \varphi''(l) &= f''(l), & \dots & \varphi^{(\lambda-1)}(l) = f^{(\lambda-1)}(l). \end{aligned}$$

Done la fonction φ est identique à la fonction f , et l'égalité qui définit la fonction $\varphi(x)$ constitue une formule propre à faire connaître un mode de décomposition de la fonction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ en fractions simples, savoir

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{1}{1.2.3\dots\alpha-1} D_a^{\alpha-1} \left[\frac{f(a)}{(x-a)\varpi_\alpha(a)} \right] \\ &+ \frac{1}{1.2.3\dots\beta-1} D_b^{\beta-1} \left[\frac{f(b)}{(x-b)\varpi_\beta(b)} \right] - \dots \end{aligned}$$