

L. LEFÈVRE

Problème donné au concours général en 1874

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 158-164

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__158_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME DONNÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1874;

PAR M. L. LEFÈVRE.

Démontrer que la forme la plus générale d'un polynôme entier $F(x)$ satisfaisant aux relations

$$(1) \quad F(1-x) = F(x),$$

$$(2) \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{F(x)}{x^m}$$

est

$$(3) \quad \begin{cases} F(x) = (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q \\ \quad \times [A_0(x^2 - x + 1)^{2n} - A_1(x^2 - x - 1)^{2(n-1)}(x^2 - x)^2 \\ \quad - A_2(x^2 - x + 1)^{2(n-2)}(x^2 - x)^4 + \dots + A_n(x^2 - x)^{2n}], \end{cases}$$

p, q, n étant des nombres entiers, et $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ des constantes quelconques.

1. Soit a une racine quelconque de l'équation

$$F(x) = 0;$$

la relation (2) montre que $\frac{1}{a}$ est également racine de cette équation. Posons

$$\frac{1}{a} = a';$$

la relation (1) montre alors que

$$1 - a' = 1 - \frac{1}{a}$$

sera une nouvelle racine ; puis

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{a}{a - 1},$$

en vertu de (2), et ainsi de suite. On est conduit de cette façon aux six expressions différentes

$$(4) \quad a, \quad \frac{1}{a}, \quad 1 - \frac{1}{a}, \quad \frac{a}{a - 1}, \quad \frac{1}{1 - a}, \quad 1 - a.$$

On reconnaît là les six valeurs du rapport anharmonique de quatre éléments, et l'on sait (ce qui peut se vérifier aisément) qu'en prenant l'inverse ou le complément à l'unité de l'une d'elles, on en retrouve une autre.

Les racines de l'équation $F(x) = 0$ se partagent donc en groupes de 6 ; et son degré sera multiple de 6. Il n'y a d'exception possible que si deux des valeurs (4) déduites d'une racine a sont égales ; je supposerai d'abord que ceci n'ait pas lieu.

Alors $F(x)$ est de la forme

$$\Lambda_0 \left[(x-a) \left(x - \frac{1}{a} \right) \dots (x-1+a) \right] \\ \times \left[(x-b) \left(x - \frac{1}{b} \right) \dots (x-1+b) \right] \dots$$

Cela posé, je considère le polynôme du sixième degré

$$f(x) = (x^2 - x + 1)^3 - \Lambda(x^2 - x)^2,$$

obtenu en faisant $p = 0$, $q = 0$, $n = 1$ dans (3).

Il est facile de voir que

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^6}$$

et

$$f(1-x) = f(x),$$

ce qui prouve, comme pour $F(x)$, que les six racines de $f(x) = 0$ sont de la forme (4), et par suite que

$$f(x) = (x^2 - x + 1)^3 - \Lambda(x^2 - x)^2 \\ = (x-a) \left(x - \frac{1}{a} \right) \left(x-1+\frac{1}{a} \right) \left(x - \frac{a}{a-1} \right) \\ \times \left(x - \frac{1}{1-a} \right) (x-1+a).$$

D'ailleurs, a étant connu, on calcule la valeur de Λ correspondante en donnant, dans cette identité, à x une valeur particulière.

Il en résulte enfin que $F(x)$ est de la forme

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_0 [(x^2 - x + 1)^3 - \Lambda(x^2 - x)^2] \\ \times [(x^2 - x + 1)^3 - B(x^2 - x)^2] \dots, \end{array} \right.$$

ou, en effectuant le produit,

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} A_0(x^2 - x + 1)^{3n} \\ + A_1(x^2 - x + 1)^{3(n-1)}(x^2 - x)^2 + \dots - A_n(x^2 - x)^{2n}. \end{array} \right.$$

Supposons maintenant que deux des valeurs (4) relatives à une racine α de $F(x) = 0$ soient égales; les autres sont aussi égales deux à deux ou trois à trois, ou à l'un des trois groupes suivants de valeurs particulières des six expressions (4) (1) :

- (I) $\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & \infty & \infty & 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{(deux des quatre éléments} \\ \text{coïncident).} \end{array} \right.$
- (II) $\begin{array}{cccccc} -1 & -1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \quad \text{(division harmonique).}$
- (III) $\begin{array}{cccccc} -\alpha & -\alpha^2 & -\alpha & -\alpha^2 & -\alpha & -\alpha^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{(division équanharmoni-} \\ \text{que).} \end{array} \right.$

α et α^2 désignent les racines cubiques imaginaires de l'unité.

Considérons alors les polynômes

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\equiv (x-1)x \equiv x^2 - x, \\ \psi(x) &\equiv (x+1)(x-2)(x-1) \equiv 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2, \\ \chi(x) &\equiv (x+\alpha)(x+\alpha^2) \equiv x^2 - x + 1, \end{aligned}$$

qui ont pour racines les nombres (I), (II) ou (III); on a

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(1-x) = \varphi(x), \\ \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\varphi(x)}{x^3}, \\ \psi(1-x) = -\psi(x), \\ \psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\psi(x)}{x^3}, \\ \chi(1-x) = \chi(x), \\ \chi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\chi(x)}{x^2}. \end{array} \right.$$

(1) Voir CLEBSCH, *Leçons sur la Géométrie*, t. I, p. 49 et 90 de la traduction française.

Supposons que l'équation $F(x) = 0$ admette comme racine l'une des quantités du groupe (II), par exemple; elle admet autant de fois les autres.

En effet, elle les admet au moins une fois; donc $F(x)$ est divisible par $\psi(x)$. Si alors le quotient

$$Q(x) = \frac{F(x)}{\psi(x)}$$

admet encore cette racine, les relations (1), (2) et (7) montrent qu'il admet encore les autres et qu'on peut, par conséquent, le diviser par $\psi(x)$, ...; on montre de même que $F(x)$ peut contenir en facteur une puissance de $\varphi(x)$ ou de $\chi(x)$. De plus, ces puissances sont paires pour $\varphi(x)$ et $\psi(x)$; car, si l'on change x en $\frac{1}{x}$, $\varphi(x)$ seul change de signe, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ ne changent pas. Si l'on change x en $1-x$, $\psi(x)$ seul change de signe.

En résumé, le polynôme $F(x)$ le plus général est

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) &= (x^2 - x)^{2p} (x^2 - x + 1)^q (2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r} \\ &\quad \times [A_0 (x^2 - x + 1)^{3n} \\ &\quad + A_1 (x^2 - x + 1)^{3(n-1)} (x^2 - x)^2 + \dots + A_n (x^2 - x)^{2n}]. \end{aligned} \right.$$

Cette forme me paraît préférable à la forme (3) de l'énoncé, car s'il est vrai que le facteur

$$(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r}$$

rentre dans le polynôme qui le suit, pour des valeurs particulières données aux constantes $A_0, A_1, \dots$, le facteur $(x^2 - x)^{2p}$ y rentre aussi bien, si l'on fait

$$A_0 = A_1 = \dots = A_{p-1} = 0.$$

Il n'est donc pas logique de mettre en évidence l'un de ces facteurs plutôt que l'autre.

Du reste, pour montrer que le facteur

$$(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r}$$

rentre dans le polynôme suivant, exprimons que $f(x)$ s'annule pour $x = -1$ (l'une des racines du groupe II), nous obtenons ainsi

$$A = \frac{27}{4}.$$

On vérifie d'ailleurs que

$$(9) \quad (x^2 - x - 1)^2 - \frac{27}{4} (x^2 - x)^2 = \frac{1}{4} (2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^2.$$

On voit qu'il suffirait, dans la forme (5), de prendre r quantités A, B, ... égales à $\frac{27}{4}$.

2. *Autres formes de F(x).* — Mais cette identité va nous fournir deux autres formes de F(x). Si l'on en tire soit $(x^2 - x)^2$, soit $(x^2 - x + 1)^3$ et qu'on porte dans (8), il vient

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) \equiv (x^2 - x)^{2p} (x^2 - x + 1)^q (2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r} \\ \quad \times [B_0 (x^2 - x + 1)^{3n} \\ \quad + B_1 (x^2 - x + 1)^{3(n-1)} (2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^2 + \dots] \end{array} \right.$$

ou

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) \equiv (x^2 - x)^{2p} (x^2 - x + 1)^q (2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2r} \\ \quad \times [C_0 (2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2n} \\ \quad + C_1 (2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^{2(n-1)} (x^2 - x)^2 + \dots]. \end{array} \right.$$

Remarque. — Cette dernière forme permet de résoudre algébriquement une équation $F(x) = 0$ satisfaisant aux conditions (1) et (2) lorsque, débarrassée des racines (I), (II), (III), si elle en a, son degré ne surpasse pas 24.

Posons dans le polynôme entre crochets

$$\frac{\psi^2(x)}{\varphi^2(x)} = \gamma,$$

on a une équation en γ du quatrième degré au plus, et qu'on sait par conséquent résoudre algébriquement. Soit $\gamma = \lambda$ l'une de ses racines, il faut alors résoudre l'équation du sixième degré

$$\psi^2(x) - \lambda \varphi^2(x) = 0.$$

Elle se décompose en deux autres

$$(12) \quad \psi(x) - \sqrt{\lambda} \varphi(x) = 0,$$

$$(13) \quad \psi(x) + \sqrt{\lambda} \varphi(x) = 0,$$

qui sont du troisième degré. x étant racine de l'une de ces équations, les relations (7) montrent que $\frac{1}{x}$ et $1 - x$ sont racines de l'autre.

L'équation (12) aura donc pour racines

$$a, \quad 1 - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1 - a}$$

par exemple, et alors (13) admettra

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{a}{a - 1}, \quad 1 - a.$$

On sait d'une manière générale qu'il existe deux transformations homographiques qui permutent circulairement les racines d'une équation du troisième degré; ces deux transformations sont ici, pour (12) comme pour (13),

$$\theta^1 x = 1 - \frac{1}{x}, \quad \theta^2 x = \frac{1}{1 - x}.$$
