

WORONTZOFF

Sur le développement en séries des fonctions implicites

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 140-143

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__140_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS
IMPLICITES;**

PAR M. WORONTZOFF.

Soient

$$x = f_v(m), \quad x = f_v(m_0) = x_0, \quad x = f_v(0) = r$$

les racines respectives des équations

$$f(x) - m = 0, \quad f(x) - m_0 = 0, \quad f(x) = 0,$$

de sorte qu'on ait identiquement

$$f[f_v(m)] = m, \quad f(x_0) = m_0, \quad f(r) = 0;$$

(141)

et

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x) dx$$

une fonction qu'il faut développer en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $m - m_0$.

En posant, pour abréger,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = D_x f(x), \quad \frac{F(x)}{f'(x)} = \Phi(x),$$

on a

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{F(x)}{f'(x)} df(x) = \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) df(x) \\ &= \int_{m_0}^m \Phi[f_v(m)] df[f_v(m)] = \int_{m_0}^m \Phi[f_v(m)] dm. \end{aligned}$$

Au moyen des formules bien connues

$$\begin{aligned} \int_{m_0}^m \Psi'(m) dm &= \Psi(m) - \Psi(m_0), \\ \Psi(m) - \Psi(m_0) &= (m - m_0) \Psi'(m_0) \\ &\quad + \frac{(m - m_0)^2}{1.2} \Psi''(m_0) + \dots \\ &\quad + \frac{(m - m_0)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} \Psi^{n-1}(m_0) \\ &\quad + \frac{(m - m_0)^n}{1.2 \dots n} \Psi^n[m_0 + \theta(m - m_0)], \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F(x) dx &= \int_{m_0}^m \Phi[f_v(m)] dm \\ &= (m - m_0) \Phi[f_v(m_0)] + \frac{(m - m_0)^2}{1.2} D_y \Phi[f_v(y)]_{y=m_0} + \dots \\ &\quad + \frac{(m - m_0)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} D_y^{n-2} \Phi[f_v(y)]_{y=m_0} + R_n \\ &= (m - m_0) \Phi(x_0) + \frac{(m - m_0)^2}{1.2} \left\{ \left[\frac{1}{f'(\mathfrak{z})} D_z \right] \Phi(\mathfrak{z}) \right\}_{z=x_0} \\ &\quad + \frac{(m - m_0)^3}{1.2.3} \left\{ \left[\frac{1}{f'(\mathfrak{z})} D_z \right]^2 \Phi(\mathfrak{z}) \right\}_{z=x_0} + \dots \\ &\quad + \frac{(m - m_0)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} \left\{ \left[\frac{1}{f'(\mathfrak{z})} D_z \right]^{n-2} \Phi(\mathfrak{z}) \right\}_{z=x_0} + R_n, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{(m - m_0)^n}{1.2.3 \dots n} \left\{ D_z^{n-1} \Phi[f_v(y)] \right\}_{y=m_0+\theta(m-m_0)} \\ &= \frac{(m - m_0)^n}{1.2.3 \dots n} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{n-1} \Phi(z) \right\}_{z=x_0+\theta_1(x-x_0)=f_v[m_0+\theta(m-m_0)]}. \end{aligned}$$

De cette formule, on déduit aussi la série suivante

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x F(x) dx &= \int_r^x F(x) dx - \int_r^{x_0} F(x) dx \\ &= \int_0^m \Phi[f_v(m)] dm - \int_0^{m_0} \Phi[f_v(m)] dm \\ &= (m - m_0) \Phi(r) + \frac{(m^2 - m_0^2)}{1.2} \left\{ \frac{1}{f'(z)} D_z \Phi(z) \right\}_{z=r} \\ &\quad + \frac{(m_3 - m_0^3)}{1.2.3} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^2 \Phi(z) \right\}_{z=r} + \dots \\ &\quad + \frac{(m^{n-1} - m_0^{n-1})}{1.2.3 \dots (n-1)} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{n-2} \Phi(z) \right\}_{z=r} + R'_n, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R'_n &= \frac{1}{1.2.3 \dots n} \left(m^n \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{n-1} \Phi(z) \right\}_{z=r+\theta(x-r)} \right. \\ &\quad \left. - m_0^n \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{n-1} \Phi(z) \right\}_{z=r+\theta_1(x_0-z)} \right). \end{aligned}$$

Exemple. — En prenant les logarithmes népériens, posons

$$f(x) = \log x = m, \quad F(x) = \log x.$$

Alors

$$\log x_0 = m_0, \quad r = 1, \quad \frac{F(x)}{f'(x)} = \Phi(x) = x \log x,$$

$$\left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^n \Phi(z) = (z D_z)^n z \log z = z(n + \log z),$$

$$[(z D_z)^n z \log z]_{z=r=1} = n,$$

$$R_n = \frac{(m - m_0)^n}{1.2.3 \dots n} \{ [x_0 + \theta(x - x_0)] \{ n - 1 + \log[x_0 + \theta(x - x_0)] \} \},$$

$$\begin{aligned} R'_n &= \frac{1}{1.2.3 \dots n} \{ m^n [1 + \theta(x - 1)] \{ n - 1 + \log[1 + \theta(x - 1)] \} \\ &\quad - m_0^n [1 + \theta_1(x_0 - 1)] \{ n - 1 + \log[1 + \theta_1(x_0 - 1)] \} \}. \end{aligned}$$

(¹) *Nouvelles Annales*, août 1888, p. 362.

Comme $R_{n=\infty} = 0$ et $R'_{n=\infty} = 0$ pour les valeurs finies de m et m_0 , on a

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^x \log x \, dx &= x_0 \left[(m - m_0) \log x_0 + \frac{(m - m_0)^2}{1.2} (1 + \log x_0) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(m - m_0)^3}{1.2.3} (2 + \log x_0) + \frac{(m - m_0)^4}{1.2.3.4} (3 \log x_0) + \dots \right] \\
 &= x_0 (m - m_0)^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{(m - m_0)}{1} \frac{1}{3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(m - m_0)^2}{1.2} \frac{1}{4} + \frac{(m - m_0)^3}{1.2.3} \frac{1}{5} + \dots \right] \\
 &\quad + x_0 \log x_0 \left[(m - m_0) + \frac{(m - m_0)^2}{1.2} + \frac{(m - m_0)^3}{1.2.3} + \dots \right] \\
 &= x_0 [e^{m-m_0} (m - m_0) - (e^{m-m_0} - 1)] + x_0 \log x_0 (e^{m-m_0} - 1) \\
 &= (x \log x - x) - (x_0 \log x_0 - x_0),
 \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^x \log x \, dx &= (m^2 - m_0^2) \frac{1}{2} + \frac{(m^3 - m_0^3)}{1} \frac{1}{3} \\
 &\quad + \frac{(m^4 - m_0^4)}{1.2} \frac{1}{4} + \frac{(m^5 - m_0^5)}{1.2.3} \frac{1}{5} + \dots \\
 &= m^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{1} \frac{1}{3} + \frac{m^2}{1.2} \frac{1}{4} + \frac{m^3}{1.2.3} \frac{1}{5} + \dots \right] \\
 &\quad - m_0^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{m_0}{1} \frac{1}{3} + \frac{m_0^2}{1.2} \frac{1}{4} + \frac{m_0^3}{1.2.3} \frac{1}{5} + \dots \right] \\
 &= [e^m m - (e^m - 1)] - [e^{m_0} m_0 - (e^{m_0} - 1)] \\
 &= [e^m (m - 1) + 1] - [e^{m_0} (m_0 - 1) + 1] \\
 &= (x \log x - x) - (x_0 \log x_0 - x_0).
 \end{aligned}$$