NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1888)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 589-591

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__589_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1888).

Mathématiques élémentaires.

Soient deux points A et A′, et deux droites D et D′ parallèles à AA′ et équidistantes de cette droite :

1° Démontrer qu'à tout point P pris sur la droite D correspond un point P′ pris sur la droite D′, tel que la droite PP′ soit tangente aux cercles S et S′ circonscrits l'un au triangle PAA′, l'autre au triangle P′AA′;

2° Trouver le lieu décrit par la projection de chacun des points A et A′ sur la droite PP′;

3° Construire les droites PP′ qui passent par un point donné Q;

4° Démontrer que les cercles S et S′ se coupent sous un angle constant;

5° Soit O le milieu du segment AA′, étudier les variations de l'angle POP′.

Mathématiques spéciales.

On donne un ellipsoïde S et deux points P et P′, et on considère les ellipses C et C′ suivant lesquelles l'ellipsoïde est coupé par les plans polaires des points P et P′ :

1° Démontrer que les coniques C et C′, et les points P et P′ sont situés sur une quadrique Σ, qui est en général unique;

2° Discuter cette quadrique en supposant que le point P′ se déplace dans l'espace, le point P et l'ellipsoïde S restant fixes;

3° Les points P et P′ étant supposés fixes et situés de façon que la quadrique Σ soit indéterminée, trouver le lieu du centre de cette quadrique;

4° En supposant que les points P et P′ se déplacent de façon que la quadrique Σ soit une sphère, trouver la surface enveloppe E de cette sphère;

5° Peut-on déterminer un point A, tel que la transformée par rayons vecteurs réciproques de la surface E, en prenant le point A pour pôle, soit un cône du second degré?

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Théorie. — Démontrer que, si l'aire d'une portion continue de surface Σ limitée par un contour fermé et donné est la plus petite possible, la somme des rayons de courbure principaux est nulle aux divers points de la portion de surface considérée.

Définition des surfaces minima. — Intégration de leur équation aux dérivées partielles. — Formules de Monge. — Formules de M. Weierstrass.

Application. — Trouver la surface minima réelle qui admet pour ligne géodésique la cycloïde définie en coordonnées rectangulaires par les équations

$$x = a(v - \sin v), \qquad y = a(1 - \cos v), \qquad z = 0;$$

2° Indiquer la forme de la surface : montrer que le plan des xy est un plan de symétrie et que les tangentes à la cycloïde en ses points de rebroussement sont des axes de symétrie de cette surface;

3° Montrer que la surface peut être coupée par une infinité de plans suivant des paraboles du second degré;

4° Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface. Démontrer qu'un plan perpendiculaire à la base de la cycloïde et à égale distance de deux points de rebroussement consécutifs de cette courbe coupe la surface suivant une ligne de courbure.

Composition de Mécanique rationnelle.

Théorie. — Les équations du mouvement d'un système matériel étant supposées mises sous la forme canonique, montrer comment Jacobi a ramené l'intégration de ces équations à la recherche d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Application. — Étant donné un hyperboloïde à une nappe représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

où l'on suppose $a < b$, déterminer le mouvement d'un point matériel non pesant dont la masse est égale à l'unité, qui est assujetti à rester sur la surface de l'hyperboloïde et qui est attiré vers le centre par une force égale au produit d'une constante ω^2 par la distance du mobile au centre. A l'instant initial, le mobile est situé dans le plan des xz à la distance b du centre, et sa vitesse v_0 est parallèle à l'axe des y.

Discuter les diverses formes que peut affecter la trajectoire suivant les valeurs de v_0; indiquer notamment les lignes de courbure de l'hyperboloïde entre lesquelles elle est comprise.

On déterminera la position du mobile sur l'hyperboloïde à une nappe à l'aide des coordonnées elliptiques λ et μ définies par les deux équations

$$\frac{x^2}{\lambda + a^2} - \frac{y^2}{\lambda - b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} - \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1,$$

en supposant

$$c^2 < \lambda \qquad \text{et} \qquad a^2 < \mu < b^2.$$