

WEILL

Sur une forme du déterminant de Vandermonde

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 427-429

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__427_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE FORME DU DÉTERMINANT DE VANDERMONDE;

PAR M. WEILL.

$a, b, c, \dots l$, étant des quantités distinctes, la fraction $\frac{1}{(x-a)(x-b)\dots(x-l)}$ peut se mettre sous la forme $\sum \frac{A}{x-a}$; les quantités A, B, . . . , L seront données par les équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A + B + \dots + L = 0, \\ AS_1^a + BS_1^b + \dots + LS_1^l = 0, \\ AS_2^a + BS_2^b + \dots = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

en désignant par S_p^a la somme des produits p à p de toutes les quantités $a, b, c, \dots l$, sauf a , et ainsi des autres.

Les équations (1) étant toujours possibles, leur déterminant n'est pas nul; or ce déterminant, qui est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ S_1^a & S_1^b & & . & \dots & S_1^l \\ S_2^a & S_2^b & . & . & \dots & . \\ \dots & \dots & . & . & \dots & . \end{vmatrix},$$

s'annule quand deux quelconques des quantités $a, b, c, \dots$ deviennent égales, et il est, par rapport aux lettres, de même degré que le déterminant de Vandermonde; donc il n'en diffère que par un facteur numérique, qui est, comme on le voit facilement, $(+1)$, si le nombre des quantités est pair, et (-1) si ce nombre est impair. On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b+c+d & c+d+a & d+a+b & a+b+c \\ bc+cd+db & cd+da+ac & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ bcd & cda & dab & abc \end{vmatrix}.$$

En résolvant le système (1) par rapport à A , on en conclut qu'un déterminant tel que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ S_1^a & S_1^b & \dots & S_1^l \\ S_2^a & S_2^b & \dots & S_2^l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

est indépendant de a ; il suffit, pour le voir, d'égaliser entre elles les deux valeurs de A obtenues l'une directement, et l'autre, en résolvant le système (1).