

F. GOMES TEIXEIRA

Démonstration d'une formule de Waring

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 382-384

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__382_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE DE WARING;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,

Professeur à l'École Polytechnique de Porto.

Dans un intéressant article intitulé : *Sur certaines fonctions symétriques; application au calcul de la somme des puissances semblables des racines d'une équation* ⁽¹⁾, M. M. d'Ocagne calcule, au moyen de la théorie des fonctions symétriques, la fonction

$$\frac{1}{(x-x_1)^n} + \frac{1}{(x-x_2)^n} + \dots + \frac{1}{(x-x_p)^n},$$

où $x_1, x_2, \dots$ représentent les racines de l'équation

$$U = \Lambda_0 x^p + \Lambda_1 x^{p-1} + \dots + \Lambda_{p-1} x + \Lambda_p = 0;$$

et ensuite déduit, du résultat auquel il arrive, une formule pour le calcul de la somme des puissances semblables des racines de cette équation, analogue à celle de Waring. Il part de l'identité

$$D_x \log U = \sum \frac{1}{x-x_\omega}$$

qui, étant dérivée $n-1$ fois par rapport à x , donne

$$\sum \frac{1}{(x-x_\omega)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} D_x^n \log U.$$

Le but de cette Note est de faire voir qu'on peut, par

⁽¹⁾ *Journal de Sciéncias mathematicas* (Coimbra), t. VII, p. 133.

la méthode de M. M. d'Ocagne, obtenir la formule de Waring en faisant usage pour le calcul de $D_x^n \log U$ d'une formule différente de celle qu'il a employée, à savoir (*)

$$J^{(n)} = \sum \frac{n! \frac{d^n}{du^n} (u^\alpha (u^\beta)^\gamma \dots (u^\lambda)^\lambda)}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda},$$

où $\sum$ représente une somme qui se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + \beta + \dots + p\lambda = n,$$

et où

$$\lambda = \alpha + \beta + \dots + \lambda,$$

En effet, cette formule donne

$$D_x^n \log U = \sum (-1)^{t-1} \frac{n! (t-1)! U^{-t} U'^\alpha U''^\beta \dots U^{(p)}{}^\lambda}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (p!)^\lambda},$$

$$\alpha + \beta + \dots + p\lambda = n,$$

$$t = \alpha + \beta + \dots + \lambda,$$

parce que

$$U^{-(p+1)} = U^{-(p+2)} - \dots - U^{(n)} = 0.$$

Nous avons donc

$$\sum \frac{1}{(x - \omega)^t} = (-1)^n n! \sum (-1)^t \frac{(t-1)! U^{-t} U'^\alpha U''^\beta \dots U^{(p)}{}^\lambda}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (p!)^\lambda}$$

et, en posant $x = 0$,

$$\sum \frac{1}{x_\omega^t} = n! \sum (-1)^t \frac{(t-1)! U_0^{-t} U_0'^\alpha U_0''^\beta \dots U_0^{(p)}{}^\lambda}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (p!)^\lambda}$$

ou

$$\sum \frac{1}{x_\omega^t} = n! \sum (-1)^t \frac{(t-1)! A_p^{-t} A_{p-1}^\alpha A_{p-2}^\beta \dots A_0^\lambda}{\alpha! \beta! \dots \lambda!}.$$

(*) Voir le *Calcul différentiel* de M. J. Bertrand, p. 308, ou mon *Curso de Analyse infinitesimal* p. 184.

En appliquant maintenant cette formule à l'équation

$$A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0,$$

dont les racines sont inverses des racines de l'équation proposée, on trouve la formule de Waring

$$\sum x_\omega^n = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)! A_0^{-i} A_1^\alpha A_2^\beta \dots A_p^\lambda}{\alpha! \beta! \dots \lambda!},$$

où $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sont les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \dots + p\lambda = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$