

A. DEL RE

Sur une question de géométrie liée à la théorie des normales à une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 359-362

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__359_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE LIÉE A LA THÉORIE
DES NORMALES A UNE QUADRIQUE;**

PAR M. A. DEL RE, à Naples.

Je ne sais si l'on a jamais pensé à la question suivante, mais elle peut être de quelque intérêt dans la théorie de la surface des centres d'une surface donnée du deuxième ordre. Soient Σ cette dernière surface, Σ_c sa surface des centres et P un point quelconque de l'espace. Si, du sommet P, on circonscrit à Σ_c le cône (P), il y aura, dans chaque plan tangent de ce cône, une seule normale à Σ : *on se propose de chercher le lieu des pieds de toutes les normales ainsi obtenues.*

Par le point P menons un plan quelconque τ , et, par son pôle S, par rapport à Σ , menons la perpendiculaire s

à ce plan. Lorsqu'on fait varier τ autour de P, le point S et le point à l'infini de s décrivent deux systèmes plans réciproques à la gerbe décrite par τ , et, conséquemment, collinéaires entre eux. Donc la droite s et le plan τ se coupent (voir ma Note *Nuova costruzione della sup. del. 5^o ordine*, etc., dans les *Rendiconti dell' Acc. di Napoli*, 1886) dans un point M qui décrit une surface du cinquième ordre douée d'une courbe double du même ordre et ayant un point triple au point P. Nommons Φ cette surface. Elle est précisément celle que M. Darboux (¹) obtient en cherchant le lieu des points de contact des plans tangents aux surfaces homofocales à Σ , conduits par P, et cette coïncidence je l'ai démontrée dans ma Note citée. La surface Φ passe donc, comme il est d'ailleurs presque évident, par la conique (Π), suivant laquelle Σ est coupée par le plan polaire Π de P, par rapport à Σ ; et ces deux surfaces Σ et Φ ont ultérieurement en commun une courbe du huitième ordre C^8 . Je dis que cette courbe est le lieu cherché.

En effet, prenons un point quelconque M de la surface Φ , et soient τ et s le plan et la droite, construits comme précédemment, qui l'ont fourni. Si dans le plan τ on conduit par M les tangentes à Σ ; les points de contact de ces deux tangentes seront les pieds des deux normales à cette surface contenues en τ (²). Donc on aura ces deux normales coïncidentes, c'est-à-dire que τ sera un plan tangent de (P), si le point M est un point aussi bien de Φ que de Σ , sans être un point de (Π),

(¹) *Sur la surface du cinquième ordre*, etc. (*Bulletin des Sciences math. et astronom.*, p. 40; 1872).

(²) Cette propriété, je l'ai démontrée dans ma Note *Sulle normali alle sup. di 2^o ordine, ai coni ed alle coniche sferiche* (Naples, tipogr. Trani, 1884); mais elle est d'ailleurs presque évidente.

dans lequel cas τ est tangent à Σ en M. Mais, lorsque cela arrive, le point M est même le pied de l'unique normale dans le plan τ ; donc la proposition est ainsi démontrée.

Une première conséquence qui suit de la définition de la courbe C^s , c'est que *par le point P passent six cordes à cette courbe, que celles-ci sont les arêtes d'un angle tétraèdre complet, et que enfin la courbe a quatre points sur le cercle à l'infini*. En effet, la surface Φ a six droites qui aboutissent au point P, formant les arêtes d'un angle tétraèdre complet, et passe par le cercle à l'infini.

2. Si l'on voulait résoudre la même question par rapport à une surface Σ' , homofocale à Σ , on arriverait à la même surface Φ , grâce à la double définition de cette surface. Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

Lorsqu'on circonscrit aux surfaces des centres de courbure d'une suite de surfaces homofocales du deuxième ordre (Σ) les cônes ayant tous un même sommet P, le lieu des pieds des normales à ces surfaces contenues dans les plans tangents aux cônes correspondants est une surface du cinquième ordre, laquelle est même le lieu des points de contact des plans tangents aux surfaces (Σ), menés par P.

3. La question que nous venons de résoudre peut être envisagée à un point de vue plus général.

Soient Σ et Σ' deux surfaces données du deuxième ordre, et Ω l'homographie résultant de la composition des polaires, par rapport à elles. Dans cette homographie, si l'on joint les points de Σ aux points correspondants de la surface Σ'' , transformée de Σ , on obtient un

système Θ du sixième ordre et de la deuxième classe ('), dont soit Σ_Θ la surface focale. Il s'agit de chercher le lieu des points de Σ tels que les rayons correspondants de Θ soient projetés d'un point P , donné arbitrairement, au moyen de plans tangents à la surface Σ_Θ . Il n'est pas difficile de s'assurer qu'au moyen de la surface du cinquième ordre, engendrée par les points de rencontre des plans de P avec les droites qui unissent les couples des pôles de ces plans par rapport à Σ , Σ' , on arrive à des conclusions parfaitement analogues à celles que nous avons exposées dans les numéros précédents.