NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorème réciproque d'un théorème de M. E. Cesàro et application

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 353-356

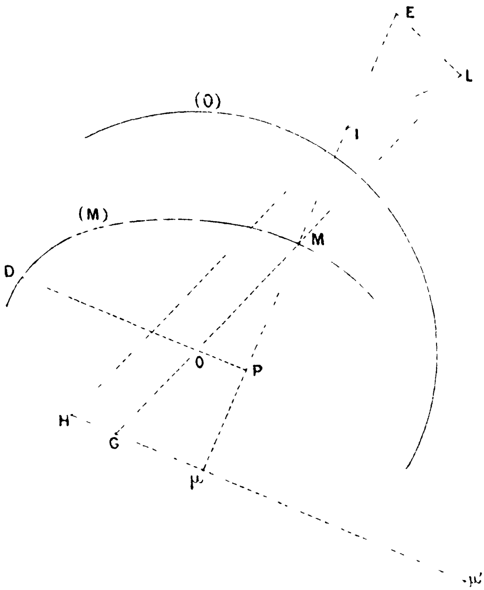
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__353_0>

THÉORÈME RÉCIPROQUE D'UN THÉORÈME DE M. E. CESARO ET APPLICATION (1);

PAR M. A. M.

On donne (fig. 1) une courbe (M) *et une circonférence* (O) *de centre* O. *Si la polaire* LE *d'un point*

Fig. 1.



quelconque M *de* (M), *prise par rapport à* (O), *détermine toujours sur les rayons de courbure, tels que* Mμ

(1) *Voir* à la page 171 de ce Volume.

de (M), *des segments* EM, Eμ *proportionnels, il en est de même des rayons vecteurs, tels que* OM, *relativement aux rayons de courbure de la développée de* (M).

Puisque LE est la polaire de M, par rapport à la circonférence (O), le produit de OM par OL est constant. La courbe (L), lieu des points tels que L, est donc la transformée par rayons vecteurs réciproques de (M); la normale LI à (L) et la normale MI à (M) sont, par suite, également inclinées sur LM. Le point I est alors le milieu de l'hypoténuse ME du triangle EML. La courbe (I), lieu des points tels que I, peut être considérée comme le lieu des points également distants de (L) et de (M). La tangente en I à (I) passe alors par le point de rencontre des tangentes en L et M à (L) et (M). Comme IL = IM, cette tangente est la bissectrice de l'angle LIM et par suite la normale en I à (I) est la parallèle IH à LM.

Appelons μ' le centre de courbure de la développée de (M) pour le point μ de cette courbe.

Par hypothèse $\frac{M\mu}{ME} = \text{const.}$ Appelons λ ce rapport, on a alors

$$\frac{M\mu}{MI} = 2\lambda \qquad \text{et aussi} \qquad \frac{\mu I}{M\mu} = \frac{2\lambda + 1}{2\lambda}.$$

Quel que soit le point M, les courbes (I), (M) et la développée de cette dernière courbe déterminent sur μI des segments proportionnels : on a alors ([1])

$$\frac{\mu'\mu}{\mu H} = \frac{\mu M}{MI} = 2\lambda, \qquad \text{d'où} \qquad \mu H = \frac{\mu'\mu}{2\lambda}.$$

Prolongeons MO jusqu'à sa rencontre G avec $\mu'\mu$.

([1]) MANNHEIM, *Cours de Geometrie descriptive*, 2e édition, p. 203 et suivantes.

On a

$$\frac{\mu H}{\mu G} = \frac{\mu I}{\mu M}.$$

Nous avons écrit précédemment la valeur de ce dernier rapport; on a alors

$$\frac{\mu H}{\mu G} = \frac{2\lambda + 1}{2\lambda}.$$

Introduisant ici la valeur de μH trouvée plus haut, on obtient

$$\frac{\mu' \mu}{\mu G} = 2\lambda + 1.$$

Le théorème est alors démontré.

Pour appliquer ce théorème à l'ellipse, nous allons d'abord démontrer géométriquement un théorème qui se trouve dans le travail de M. Cesaro [1]. Nous conservons la *fig.* 1, en supposant que (M) soit une ellipse dont les demi-axes sont a et b et que (O) ait pour rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

La polaire LE *du point* M *de l'ellipse* (M), *par rapport à la circonférence* (O) *dont le rayon est égal à* $\sqrt{a^2 + b^2}$, *rencontre la normale* ME *à l'ellipse en un point* E *tel que* ME *égale le rayon de courbure* $M\mu$ *de l'ellipse en* M.

Puisque le rayon de (O) est $\sqrt{a^2 + b^2}$, il résulte de cet énoncé que

$$OM \times OL = a^2 + b^2;$$

de là

$$OL - OM = \frac{a^2 + b^2 - \overline{OM}^2}{OM}.$$

---

[1] *Voir* page 175 de ce Volume.

Menons le diamètre OD perpendiculairement à $M\mu$, on a

$$\overline{OD}^2 + \overline{OM}^2 = a^2 + b^2.$$

On peut donc écrire (OL — OM) ou $ML = \dfrac{\overline{OD}^2}{OM}$.

Mais on sait que le rayon de courbure de l'ellipse en M est égal à $\dfrac{\overline{OD}^2}{MP}$; on a alors

$$\frac{ML}{M\mu} = \frac{MP}{OM} = \frac{ML}{ME}:$$

donc $ME = M\mu$. Ce qu'il fallait démontrer.

Centre de courbure de la développée de l'ellipse. — Pour avoir ce centre de courbure, il suffit d'appliquer le théorème précédent à l'ellipse. On trouve ainsi qu'*on obtient le centre de courbure* μ' *de la développée de l'ellipse* (M) *en prolongeant* $G\mu$ *de trois fois sa longueur*. Ce qui est la construction due à Maclaurin.