

GENTY

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 350-352

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__350_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. GENTY.

Soit une droite de longueur constante dont les extrémités A_1 et A_2 se déplacent sur deux surfaces données (S_1) et (S_2) , de telle manière que les normales à ces surfaces menées aux points A_1 et A_2 respectivement se rencontrent en un point N . La normale au lieu décrit par un point quelconque A de la droite $A_1 A_2$ passe aussi par le point N .

Soient (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des extrémités de la droite mobile dans l'une de ses positions, et

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 dx_1 + B_1 dy_1 + C_1 dz_1 = 0, \\ A_2 dx_2 + B_2 dy_2 + C_2 dz_2 = 0 \end{cases}$$

les équations différentielles des surfaces (S_1) et (S_2) .

On aura

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{const.};$$

d'où

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (x_1 - x_2)(dx_1 - dx_2) \\ + (y_1 - y_2)(dy_1 - dy_2) + (z_1 - z_2)(dz_1 - dz_2) = 0. \end{array} \right.$$

Cela posé, les normales aux points A_1 et A_2 auront pour équations

$$\frac{x - x_1}{A_1} = \frac{y - y_1}{B_1} = \frac{z - z_1}{C_1},$$

$$\frac{x - x_2}{A_2} = \frac{y - y_2}{B_2} = \frac{z - z_2}{C_2}.$$

La condition qui exprime que ces deux normales se rencontrent est

$$L_1 = L_2,$$

en posant, pour abrégér,

$$L_1 = \begin{vmatrix} x_1 & A_1 & A_2 \\ y_1 & B_1 & B_2 \\ z_1 & C_1 & C_2 \end{vmatrix}, \quad L_2 = \begin{vmatrix} x_2 & A_1 & A_2 \\ y_2 & B_1 & B_2 \\ z_2 & C_1 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Et, si l'on pose de même

$$M_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & A_1 \\ y_1 & y_2 & B_1 \\ z_1 & z_2 & C_1 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & A_2 \\ y_1 & y_2 & B_2 \\ z_1 & z_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

on voit sans peine que le point de rencontre N des deux normales a pour coordonnées

$$x = x_1 + \frac{M_2}{L_2} A_1 = x_2 + \frac{M_1}{L_1} A_2,$$

$$y = y_1 + \frac{M_2}{L_2} B_1 = y_2 + \frac{M_1}{L_1} B_2,$$

$$z = z_1 + \frac{M_2}{L_2} C_1 = z_2 + \frac{M_1}{L_1} C_2.$$

Soient maintenant

$$\xi = \frac{lx_1 + mx_2}{l + m}, \quad \eta = \frac{ly_1 + my_2}{l + m}, \quad \zeta = \frac{lz_1 + mz_2}{l + m}$$

les coordonnées du point A, $\frac{l}{m}$ étant un rapport constant.

La relation à démontrer est

$$(x - \xi) d\xi + (y - \eta) d\eta + (z - \zeta) d\zeta = 0,$$

ou

$$\sum (x - \xi) d\xi = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} \sum (x - \xi) (l dx_1 + m dx_2) &= 0, \\ \sum \left[l \left(x_1 + \frac{M_2}{L_2} A_1 - \frac{l x_1 + m x_2}{l + m} \right) dx_1 \right. \\ &\quad \left. + m \left(x_1 + \frac{M_1}{L_1} A_2 - \frac{l x_1 + m x_2}{l + m} \right) dx_2 \right] = 0, \end{aligned}$$

ou, en développant et tenant compte des équations (1),

$$\sum \left(l x_1 dx_1 + m x_2 dx_2 - \frac{l^2 x_1 dx_1 + l m x_2 dx_1 + l m x_1 dx_2 + m^2 x_2 dx_2}{l + m} \right) = 0,$$

ou enfin

$$\sum (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 - x_2 dx_1 - x_1 dx_2) = 0,$$

équation identique à la relation (2).