

E. JAGGI

Solution de la question proposée au concours d'agrégation en 1884

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 341-344

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__341_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE
AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1884;**

PAR M. E. JAGGI.

On donne une ellipse et une hyperbole situées respectivement dans deux plans rectangulaires P et Q, et pour chacune desquelles la droite d'intersection de ces deux plans est axe de symétrie :

1° On considère tous les plans R tangents à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole, et l'on propose de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces du second ordre S tangentes à la fois à tous les plans R;

2° Trouver le lieu des centres des surfaces S et déterminer la nature de chacune de ces surfaces suivant la position occupée par son centre;

3° Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces S soient homofocales.

Nous prendrons pour plans des xz et des yz les plans P et Q des deux coniques, et pour origine le milieu des deux centres.

Les équations des deux coniques seront

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{(z + z_0)^2}{d^2} - 1 = 0.$$

En exprimant que le plan

$$(R) \quad ux + vy + wz - 1 = 0$$

a ses traces tangentes aux deux coniques, nous avons les deux relations suivantes

$$f(u, w) = (wz_0 - 1)^2 - b^2 w^2 - a^2 u^2 = 0,$$

$$\varphi(v, w) = (wz_0 + 1)^2 + d^2 w^2 - c^2 v^2 = 0,$$

qui sont les équations des deux coniques en coordonnées tangentielles.

1° On voit immédiatement que les plans R sont tangents aux surfaces du second degré dont l'équation générale est

$$F(u, v, w) = \lambda f(u, w) + \mu \varphi(v, w) = 0.$$

2° Le lieu des centres est une droite, car on sait qu'en général le lieu des centres des quadriques tangentes à huit plans est une droite. Ici, cette droite est l'axe des z ; car, le système des plans étant symétrique par rapport à cet axe, les surfaces le sont aussi. L'analyse le donne aussi simplement : le centre étant le pôle du plan à l'infini, on a, entre ses coordonnées, les relations

$$\frac{x}{F'_x(0)} = \frac{y}{F'_y(0)} = \frac{z}{F'_z(0)} = \frac{1}{F'_0(0)},$$

d'où l'on tire

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} z_0.$$

Pour discuter la nature de la surface par rapport à la position de son centre, nous introduirons le z du centre dans l'équation en éliminant λ et μ . En appelant ζ ce nouveau paramètre, l'équation F s'écrit

$$0 = w^2[(b^2 + d^2)\zeta - z_0(b^2 - d^2 - 2z_0^2)] \\ + 4wz_0\zeta - a^2u^2(z_0 - \zeta) - c^2v^2(z_0 + \zeta) + 2z_0.$$

Nous poserons, pour abrégé,

$$\zeta_1 = \frac{b^2 - d^2 - 2z_0^2}{b^2 + d^2} z_0.$$

Si $z_0 > b$, $\zeta_1 < -z_0$, ζ variant de $-\infty$ à ζ_1 , la surface est un hyperboloïde; pour ζ_1 , un paraboloïde hyperbolique; entre ζ_1 et $-z_0$, un hyperboloïde; pour $-z_0$, un cylindre; entre $-z_0$ et z_0 , un hyperboloïde; pour z_0 , un cylindre et au delà un hyperboloïde.

Si $z_0 < b$, de $-\infty$ à $-z_0$, la surface est un hyperboloïde; pour $-z_0$, un cylindre; entre z_0 et ζ_1 , un ellipsoïde; pour ζ_1 , un paraboloïde elliptique; au delà, un hyperboloïde, sauf pour z_0 , pour laquelle la surface est un cylindre.

3° Pour exprimer la condition que les surfaces sont homofocales, je remarque qu'il suffit d'écrire que la développable circonscrite à toutes les quadriques passe par le cercle imaginaire de l'infini ou que les plans lui sont tangents.

Il suffit pour cela d'écrire que le plan

$$ux + vy + wz = 0$$

est tangent au cône

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

ce qui donne

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Cette équation, jointe aux deux suivantes,

$$(\omega z_0 - 1)^2 - b^2 \omega^2 - a^2 u^2 = 0,$$

$$(\omega z_0 + 1)^2 + d^2 \omega^2 - c^2 v^2 = 0,$$

doit laisser u , v , ω variables. En formant l'équation en ω qui en résulte et écrivant qu'elle se réduit à une identité, on a les conditions

$$z_0 = 0, \quad c^2 = -a^2, \quad d^2 = a^2 - b^2.$$

Les deux coniques ont alors pour équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{v^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2 - a^2} + 1 = 0.$$

On voit que, pour que la seconde conique soit une hyperbole, il est nécessaire de supposer $a^2 < b^2$ et qu'alors elle passe par les foyers de l'ellipse.
