

Solution de la question d'algèbre proposée pour l'admission à l'École normale supérieure en 1888

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 314-317

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__314_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION D'ALGÈBRE PROPOSÉE
POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1888.**

Un polynôme $f(x)$ de degré n vérifie l'identité

$$nf(x) = (x - a)f'(x) + bf''(x).$$

1° Chercher les coefficients de $f(x)$, ordonné suivant les puissances de $(x - a)$;

2° Chercher les conditions de réalité des racines;

3° Prouver que, si b_0 est la valeur absolue de b , les racines de $f(x)$ sont comprises entre

$$a - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2} b_0}, \quad a + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2} b_0}.$$

1° Le développement de $f(x)$, ordonné suivant les puissances de $x - a$, est

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a).$$

Les coefficients à chercher sont donc $f(a), f'(a), \dots, f^n(a)$.

De l'identité

$$(1) \quad nf(\tau) = (x - a)f'(\tau) + bf''(\tau),$$

on tire, par des dérivations successives, les identités

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (n-1)f'(x) = (x-a)f''(x) + bf'''(x), \\ \dots\dots\dots, \\ (n-p+1)f^{p-1}(x) = (x-a)f^p(x) + bf^{p+1}(x), \\ \dots\dots\dots, \\ 2f^{n-2}(x) = (x-a)f^{n-1}(x) + bf^n(x), \\ f^{n-1}(x) = (x-a)f^n(x); \end{array} \right.$$

d'où, en remplaçant x par a ,

$$\begin{array}{l} nf(a) = bf''(a), \\ (n-1)f'(a) = bf'''(a), \\ \dots\dots\dots, \\ (n-p+1)f^{p-1}(a) = bf^{p+1}(a), \\ \dots\dots\dots, \\ 2f^{n-2}(a) = bf^n(a), \\ f^{n-1}(a) = 0. \end{array}$$

On a donc

$$f^{n-1}(a) = f^{n-3}(a) = f^{n-5}(a) = \dots = 0,$$

$$f^{n-2}(a) = \frac{b}{2} f^n(a),$$

$$f^{n-4}(a) = \frac{b^2}{2.4} f^n(a),$$

$$f^{n-6}(a) = \frac{b^3}{2.4.6} f^n(a),$$

$$\dots\dots\dots$$

et

$$f(x) = f^n(a) \left[\frac{(x-a)^n}{n!} + \frac{b}{2} \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{b^2}{2.4} \frac{(x-a)^{n-4}}{(n-4)!} + \frac{b^3}{2.4.6} \frac{(x-a)^{n-6}}{(n-6)!} + \dots \right].$$

2° Si b est positif et si n est pair, tous les termes de $f(x)$ sont de même signe, quelle que soit la valeur réelle attribuée à x , et l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires.

Si b est positif et si n est impair, il suffit de supprimer

le facteur $x - a$, commun à tous les termes de $f(x)$, pour être ramené au cas précédent. L'équation $f(x) = 0$ n'a donc qu'une racine réelle a .

Si b est nul, l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et égales à a .

Si b est négatif, les identités (1) et (2) montrent que la suite de Sturm, relative à $f(x)$, est complète et se compose des polynômes

$$f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^n(x),$$

dont les premiers coefficients sont tous de même signe. L'équation $f(x) = 0$ a donc toutes ses racines réelles et distinctes.

3^o Quand l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une racine réelle a , cette racine est évidemment comprise entre les nombres indiqués; ces nombres se réduisent d'ailleurs à a quand l'équation a toutes ses racines égales à a ; il suffit donc d'examiner le cas où toutes les racines sont réelles et distinctes.

En groupant les termes deux par deux, à partir du premier, et en remplaçant b par $-b_0$, l'équation peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} \left[\frac{(x-a)^2}{(n-1)n} - \frac{b_0}{2} \right] \\ & + \frac{b_0^2}{2 \cdot 4} \frac{(x-a)^{n-6}}{(n-6)!} \left[\frac{(x-a)^2}{(n-5)(n-4)} - \frac{b_0}{6} \right] \\ & + \frac{b_0^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{(x-a)^{n-10}}{(n-10)!} \left[\frac{(x-a)^2}{(n-9)(n-8)} - \frac{b_0}{10} \right] + \dots = 0. \end{aligned}$$

Le premier crochet sera positif si la fraction $\frac{(x-a)^2}{(n-1)n}$ est supérieure à $\frac{b_0}{2}$; mais alors tous les autres crochets le seront aussi, car le premier terme de chaque crochet est supérieur à $\frac{(x-a)^2}{(n-1)n}$ comme ayant un dénominateur plus petit, et le second terme est inférieur à $\frac{b_0}{2}$ comme

ayant un dénominateur plus grand. Les puissances de $(x - a)$ qui précèdent chaque crochet, et le terme qui reste seul, si les termes de $f(x)$ sont en nombre impair, sont de même parité. Toute valeur de x qui satisfait à l'inégalité

$$\frac{(x - a)^2}{(n - 1)n} - \frac{b_0}{2} > 0$$

rend donc tous les termes de $f(x)$ de même signe, et, par suite, ne peut être racine; il en résulte que les racines de $f(x)$ sont comprises entre celles de l'équation

$$\frac{(x - a)^2}{(n - 1)n} - \frac{b_0}{2} = 0,$$

c'est-à-dire entre les nombres indiqués.

CH. B.