

E. BARISIEN

Solution de la question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1887

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 244-248

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7_244_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1887 ⁽¹⁾;**

PAR M. E. BARISIEN.

1° Soient a et b les coordonnées du point ω par rapport aux axes Ox et Oy . L'équation de la droite $A\omega B$ est de la forme

$$(1) \quad y - b = m(x - a).$$

Celle de la droite perpendiculaire ωCD est

$$(2) \quad y - b = -\frac{1}{m}(x - a).$$

L'équation générale des coniques tangentes aux points d'intersection de la droite AB avec le système des deux droites Ox et Oy est de la forme

$$[y - b - m(x - a)]^2 - 2\lambda xy = 0$$

ou, en développant,

$$y^2 + m^2 x^2 - 2(m + \lambda)xy + 2(y - mx)(ma - b) + (ma - b)^2 = 0.$$

Exprimons que cette conique est une parabole : nous aurons entre λ et m la relation

$$m(2m + \lambda) = 0;$$

d'où

$$\lambda = -2m.$$

(¹) *Nouvelles Annales*, 3^e série, t. VI, p. 325.

(245)

L'équation de la parabole tangente en B et A aux axes Ox et Oy est donc en fonction du seul paramètre m ,

$$(3) \quad (y + mx)^2 + 2(y - mx)(ma - b) + (ma - b)^2 = 0.$$

L'équation de l'axe de cette parabole P est de la forme

$$y + mx + \mu = 0,$$

et celle de la tangente au sommet de la forme

$$my - x + \nu = 0,$$

de telle sorte que l'on peut écrire l'équation de la parabole de la façon suivante

$$(4) \quad (y + mx + \mu)^2 = 2\rho(my - x + \nu),$$

les quantités μ , ρ , ν restant à déterminer par l'identification des équations (3) et (4). Cette identification fournit les trois relations

$$\begin{aligned} \mu - m\rho &= ma - b, \\ \mu m + \rho &= -m(ma - b), \\ \mu^2 - 2\rho\nu &= (ma - b)^2, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit sans difficulté

$$\begin{aligned} \mu &= (ma - b) \frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \\ \rho &= -\frac{2m(ma - b)}{1 + m^2}, \\ \nu &= \frac{m(ma - b)}{1 + m^2}. \end{aligned}$$

L'équation de l'axe de la parabole (3) est donc

$$(5) \quad y + mx + (ma - b) \frac{1 - m^2}{1 + m^2} = 0.$$

Quant à la directrice, comme elle est perpendiculaire à l'axe et qu'elle passe par le point O, puisque les tan-

gentes issues de ce point sont rectangulaires, son équation est

$$(6) \quad my - x = 0.$$

En changeant dans les équations (5) et (6) m en $-\frac{1}{m}$, on obtiendra les équations de l'axe et de la directrice de la seconde parabole P'. Ces équations sont par suite

$$(7) \quad my - x - (mb + a) \frac{1 - m^2}{1 + m^2} = 0$$

pour l'axe, et

$$(8) \quad y - mx = 0$$

pour la directrice.

2° Le lieu du point de concours des droites (5) et (6), qui sera évidemment le même que le lieu du point de concours de (7) et (8), s'obtiendra en éliminant m entre (5) et (6), par exemple. La valeur de m tirée de (6) et portée dans (5) conduit à l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)(ax - by).$$

C'est une courbe du quatrième degré, fermée, ayant un point triple à l'origine, et pour tangentes en ce point les bissectrices de l'angle des axes et la droite

$$y = \frac{a}{b}x.$$

3° Pour avoir le lieu du point de concours des axes, il faut éliminer m entre les équations (5) et (7).

Pour cela, résolvons d'abord ces équations par rapport à x et y ; elles deviennent

$$x = \frac{1 - m^2}{(1 + m^2)^2} [ymb + a(1 - m^2)],$$

$$y = \frac{1 - m^2}{(1 + m^2)^2} [b(1 - m^2) - ma]$$

On en déduit les relations

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \frac{(1 - m^2)^2}{(1 + m^2)^2} (a^2 + b^2), \\ax + by &= \frac{(1 - m^2)^2}{(1 + m^2)^2} (a^2 + b^2),\end{aligned}$$

qui montrent que l'on a

$$x^2 + y^2 = ax + by,$$

ce qui indique que le lieu demandé est le cercle décrit sur $O\omega$ comme diamètre.

Il est à remarquer que l'énoncé parle à tort d'un second cercle, comme lieu du point de concours des axes.

4° Déterminons les coordonnées du foyer par cette condition qu'il est le pôle de la directrice.

L'équation de la polaire d'un point (x_1, y_1) de la parabole (3) est

$$\begin{aligned}&x[m(y_1 + mx_1) - m(ma - b)] \\&+ y[y_1 + mx_1 + ma - b] \\&+ (ma - b)(y_1 - mx_1) + (ma - b)^2 = 0.\end{aligned}$$

Identifions cette équation avec l'équation (6) de la directrice : nous avons alors

$$\begin{aligned}y_1 - mx_1 + ma - b &= 0, \\ \frac{m[y_1 + mx_1 - ma + b]}{-1} &= \frac{y_1 + mx_1 + ma - b}{m}.\end{aligned}$$

Ces deux relations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}y_1 - mx_1 &= b - ma, \\ y_1 + mx_1 &= (ma - b) \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1};\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = \frac{m(ma - b)}{m^2 + 1}, \quad y_1 = -\frac{ma - b}{m^2 + 1}.$$

(248)

Telles sont les coordonnées du foyer de la parabole P.

On trouverait de même, pour celles du foyer de la parabole P',

$$x_2 = \frac{a + mb}{m^2 + 1}, \quad y_2 = \frac{m(a + mb)}{m^2 + 1}.$$

Par suite, on a pour la distance D des deux foyers

$$D^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2 + b^2,$$

ce qui indique que cette distance est constante et égale à $O\omega$.