

ALEXANDRE RENON

Solution géométrique de la question 1567

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 104-105

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__104_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 1567;

PAR M. ALEXANDRE RENON,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Moulins.

1° Soient deux coniques A et B ayant respectivement pour foyers réels a_1 et a_2 , b_1 et b_2 ; soit C une conique quelconque inscrite dans le quadrilatère circonscrit à A et B; les deux couples de droites joignant un foyer de C aux points a_1 et a_2 , b_1 et b_2 ont les mêmes bissectrices.

En effet, soit c un des foyers de C. Menons les bissectrices cx et cy du couple $c(a_1, a_2)$. On sait que ces deux droites sont conjuguées par rapport à la conique A; d'ailleurs, elles sont conjuguées par rapport à C, puisque c est un foyer de cette conique.

Mais, le lieu des pôles de la droite cx par rapport aux coniques inscrites dans le quadrilatère considéré étant une droite, c'est la droite cy qui contient les pôles de cx par rapport à A et C. Le pôle de cx par rapport à B est donc sur cy . On verrait de même que le pôle de cy par rapport à B est sur cx ; les deux droites cx et cy sont donc conjuguées par rapport à B et, par suite, sont bissectrices du couple $c(b_1, b_2)$.

2° Le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à deux coniques ne change pas quand ces deux coniques varient, leurs foyers restant fixes.

En effet, le lieu des foyers c coïncide avec le lieu des

points tels que les deux couples $c(a_1, a_2)$, $c(b_1, b_2)$ forment une involution, lieu qui ne dépend que de la position des points a_1, a_2, b_1, b_2 .

Du reste, on sait que le lieu des foyers est une cubique passant par les points cycliques. Sept points suffisent à la déterminer. Or nous connaissons huit points du lieu qui sont les huit foyers réels ou imaginaires des deux coniques en question. Si ces points sont supposés fixes, le lieu ne change pas.

3° *Le lieu des ombilics de deux systèmes de coniques respectivement homofocales coïncide avec le lieu précédent.*

Effectivement, si l'on considère une conique de chaque système et les quatre tangentes communes à ces deux coniques, la droite qui joint deux ombilics non situés sur une même tangente peut être regardée comme une conique infiniment aplatie, tangente à ces quatre droites, et les ombilics sont précisément les foyers de ces coniques singulières.

On peut encore s'en rendre compte en remarquant que les tangentes menées d'un point à une conique forment un faisceau en involution avec les droites qui joignent ce point aux foyers; les deux couples de droites qui joignent l'ombilic aux quatre foyers réels des deux systèmes de coniques admettent alors les mêmes bissectrices que le couple formé par les tangentes communes issues de l'ombilic considéré.
