

WEILL

Sur quelques formes quadratiques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 85-87

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__85_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES FORMES QUADRATIQUES ;

PAR M. WEILL.

I. L'expression

$$(b-c)(\lambda+a)^2 + (c-a)(\lambda+b)^2 + (a-b)(\lambda+c)^2$$

étant indépendante de λ , il en résulte que tout nombre appartenant à la forme

$$(b-c)a^2 + (c-a)b^2 + (a-b)c^2$$

peut, d'une infinité de manières, être mis sous la forme

$$(b-c)X^2 + (c-a)Y^2 + (a-b)Z^2.$$

Par une transformation facile, on en conclut que

tout nombre de la forme

$$pq(p+q)$$

peut, d'une infinité de manières, se mettre sous la forme

$$px^2 + qy^2 - (p+q)z^2.$$

Ainsi, tout nombre de la forme $m(m+1)$ est, d'une infinité de manières, de la forme

$$mx^2 + y^2 - (m+1)z^2.$$

De même, tout nombre de la forme $2m^2$ est, d'une infinité de manières, de la forme

$$x^2 + y^2 - 2z^2.$$

Il est facile de généraliser cette méthode et d'en déduire un grand nombre de résultats.

II. Soit un nombre de la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2.$$

Il appartiendra aussi à la forme

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 = & (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\ & + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2, \end{aligned}$$

si l'on a les égalités

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2, \\ B &= \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2, \\ C &= \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2, \\ 0 &= \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'', \\ 0 &= \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'', \\ 0 &= \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma''; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2, \\ B &= \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2, \\ 0 &= \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'', \\ C &= AB. \end{aligned}$$

Pour simplifier, nous ferons $\beta'' = 1$; d'où

$$B = \beta^2 + \beta'^2 + 1,$$

$$A = \alpha^2 + \alpha'^2 + (\alpha\beta + \alpha'\beta')^2,$$

$$C = AB.$$

On a ainsi une solution très générale, mais non la solution complète du problème suivant :

Trouver les formes des entiers A, B, C qui soient telles que le nombre

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2$$

soit une somme de trois carrés.

Ainsi le nombre

$$2x^2 + 3y^2 + 6z^2$$

est une somme de trois carrés; de même,

$$5x^2 + 6y^2 + 30z^2$$

est une somme de trois carrés, et ainsi de suite.