

CH. BIEHLER

Sur la forme adjointe

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 79-82

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__79_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__79_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA FORME ADJOINTÉ;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Nous allons, dans ce qui suit, donner une démonstration simple de quelques propriétés de la fonction adjointe d'une forme quadratique donnée; pour plus de simplicité, nous considérerons le cas d'une forme du second degré à trois variables.

Soit

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

Si l'on pose

$$(1) \quad \begin{cases} Ax + B''y + B'z = u, \\ B''x + A'y + Bz = v, \\ B'x + By + A''z = w, \end{cases}$$

on aura, en vertu du théorème d'Euler,

$$ux + vy + wz = f(x, y, z).$$

Ces quatre équations nous donnent immédiatement

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & f \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$\Delta f = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix},$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

Si l'on développe le second membre de l'égalité précédente, il viendra une expression de la forme

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y, z) \\ = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'uw + 2b''uv. \end{aligned}$$

Nous désignerons par $F(u, v, w)$ ce polynôme du second degré; c'est la forme adjointe de $f(x, y, z)$. Ses coefficients sont les dérivées et demi-dérivées de Δ prises par rapport à A, A', A'', B, B', B'' .

Si l'on résout les équations (1) par rapport à x, y, z , on obtient le système

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta x = au + b''v + b'w, \\ \Delta y = b''u + a'v + bw, \\ \Delta z = b'u + bv + a''w. \end{cases}$$

Les coefficients a, a', a'', b, b', b'' sont précisément ceux de la fonction adjointe, comme on le vérifie encore en multipliant ces équations par u, v, w et en ajoutant membre à membre.

2. Si l'on opère maintenant sur $F(u, v, w)$, comme nous l'avons fait sur $f(x, y, z)$, c'est-à-dire si l'on forme la fonction adjointe de $F(u, v, w)$, on posera d'abord

$$(3) \quad \begin{cases} au + b''v + b'w = \xi, \\ b''u + a'v + bw = \tau_1, \\ b'u + bv + a''w = \zeta; \end{cases}$$

on a aussi

$$\xi u + \tau_1 v + \zeta w = F;$$

il en résulte

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & \xi \\ b'' & a' & b & \eta \\ b' & b & a'' & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & F \end{vmatrix} = 0,$$

et, si l'on désigne par δ le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix},$$

on aura

$$\delta F = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & \xi \\ b'' & a' & b & \eta \\ b' & b & a'' & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ la fonction du second membre; nous aurons

$$\delta F(u, v, w) = \Phi(\xi, \eta, \zeta).$$

Mais les équations (3), comparées aux équations (2), nous montrent que

$$\xi = \Delta x,$$

$$\eta = \Delta y,$$

$$\zeta = \Delta z;$$

on aura donc

$$\Delta f(x, y, z) = F(u, v, w),$$

$$\delta F(u, v, w) = \Phi(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \Delta^2 \Phi(x, y, z).$$

Si l'on élimine $F(u, v, w)$, il viendra

$$\Delta \delta f(x, y, z) = \Delta^2 \Phi(x, y, z)$$

et, comme δ est le déterminant adjoint de Δ , on aura

$$\delta = \Delta^2,$$

par suite

$$\Phi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z).$$

La forme adjointe de $F(u, v, w)$ est donc la forme primitive $f(x, y, z)$ dont tous les coefficients ont été multipliés par Δ .

Les coefficients de la fonction Φ sont formés avec les quantités a, a', a'', b, b', b'' , comme ceux de F sont formés avec A, A', A'', B, B', B'' ; par suite, on aura, en vertu de la relation $\Phi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z)$,

$$\begin{aligned} a' a'' - b^2 &= A \Delta, \\ a'' a - b'^2 &= A' \Delta, \\ a a' - b''^2 &= A'' \Delta, \\ ab - b' b'' &= B \Delta, \\ a' b' - b'' b &= B' \Delta, \\ a'' b'' - b b' &= B'' \Delta. \end{aligned}$$

Ce sont les relations de Gauss; elles nous montrent que, si l'invariant de la fonction $f(x, y, z)$ est nul, la forme adjointe $F(u, v, w)$ est un carré parfait.