

CH. BIEHLER

Sur l'élimination par la méthode d'Euler

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 67-75

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__67_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉLIMINATION PAR LA MÉTHODE D'EULER ;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. On sait que, si $F(x, y)$ et $G(x, y)$ sont deux polynômes homogènes en x et y , de degrés respectifs m et p , si $\Delta(x, y)$ est le plus grand commun diviseur de ces deux polynômes, $\Delta(x, y)$ est de la forme

$$\Delta(x, y) = U G(x, y) + V F(x, y),$$

U et V étant des polynômes entiers et homogènes en x et y .

On le voit immédiatement en observant que les restes successifs obtenus dans les opérations qui conduisent au plus grand commun diviseur Δ sont tous de cette forme.

Cela posé, on démontre aisément que, si $F(x, y)$ divise un produit de deux polynômes $G(x, y) \times H(x, y)$ et s'il est premier avec $G(x, y)$, il divise $H(x, y)$; les polynômes F , G et H sont homogènes.

En effet, les deux polynômes $F(x, y)$ et $G(x, y)$ étant premiers entre eux, on pourra trouver deux polynômes U et V , tels que

$$U G(x, y) + V F(x, y) = 1 ;$$

par suite,

$$U G(x, y) \times H(x, y) + V F(x, y) \times H(x, y) = H(x, y).$$

$F(x, y)$ divise, par hypothèse, le produit

$$G(x, y) \times H(x, y);$$

il divise donc les deux parties du premier membre et par suite il divise $H(x, y)$.

Cette proposition va nous permettre de démontrer le théorème d'Euler, à savoir :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux polynômes $F(x, y)$, $G(x, y)$ homogènes aient un diviseur commun en x et y , c'est qu'il existe deux polynômes U et V de degrés respectivement moindres que F et G , tels que l'on ait identiquement

$$U G(x, y) + V F(x, y) = 0.$$

La condition est nécessaire; car, si $F(x, y)$ et $G(x, y)$ ont un diviseur commun Θ , on aura

$$F(x, y) = \Theta F_1(x, y),$$

$$G(x, y) = \Theta G_1(x, y)$$

et, par suite,

$$F_1(x, y) G(x, y) - G_1(x, y) F(x, y) = 0,$$

ce qui fait voir que la condition est nécessaire.

Elle est suffisante; car, si elle est remplie, on aura

$$U G(x, y) = - V F(x, y)$$

Si $F(x, y)$ et $G(x, y)$ étaient premiers entre eux, $F(x, y)$ divisant le produit $U G(x, y)$ et étant premier avec $G(x, y)$ devrait diviser U qui est de degré inférieur à F ; les polynômes $F(x, y)$ et $G(x, y)$ ne pouvant être premiers entre eux admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur à zéro.

On peut montrer de plus que, si U et V sont respectivement de degrés $m - \lambda$ et $p - \lambda$, les fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$ admettent un plus grand commun diviseur qui est de degré λ au moins.

Supposons, en effet, que le facteur commun à $F(x, y)$ et à $G(x, y)$ soit de degré λ' plus petit que λ .

$$F(x, y) = \theta F_1(x, y),$$

$$G(x, y) = \theta G_1(x, y).$$

$F_1(x, y)$ sera de degré $m - \lambda'$; $G_1(x, y)$, de degré $p - \lambda'$, et l'on aura

$$U G_1(x, y) + V F_1(x, y) = 0;$$

U et V étant de degrés respectivement inférieurs à F_1 et à G_1 , les polynômes F_1 et G_1 ne sauraient être premiers entre eux; il existe donc un facteur commun à $F(x, y)$ et à $G(x, y)$ de degré au moins égal à λ .

2. Nous allons étudier maintenant quelques propriétés des polynômes U et V qui nous seront utiles dans la suite.

I. Si les polynômes $F(x, y)$, $G(x, y)$ n'admettent pour plus grand commun diviseur qu'une fonction du premier degré $\beta x - \alpha y$, les polynômes U et V , qui fournissent l'identité d'Euler, sont premiers entre eux, U et V étant de degrés $m - 1$, $p - 1$.

En effet, si U et V admettaient un facteur commun Θ , on aurait

$$U = \Theta U_1,$$

$$V = \Theta V_1,$$

et, par suite, l'identité

$$U G(x, y) + V F(x, y) = 0,$$

devenant

$$U_1 G(x, y) + V_1 F(x, y) = 0,$$

nous montre que $F(x, y)$ et $G(x, y)$ admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur au premier, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur F et G .

II. Si les deux polynômes $F(x, y)$, $G(x, y)$ n'admettent pour plus grand commun diviseur qu'une fonction du premier degré de la forme $\beta x - \alpha y$, il n'existe qu'un seul système de polynômes U et V satisfaisant à l'identité d'Euler, U et V étant, comme précédemment, de degrés $m - 1$ et $p - 1$.

Supposons, en effet, qu'il existe deux systèmes U et V , U_1 et V_1 donnant les identités

$$U G(x, y) + V F(x, y) = 0,$$

$$U_1 G(x, y) + V_1 F(x, y) = 0;$$

on en tirera

$$(UV_1 - VU_1) G(x, y) = 0$$

ou

$$UV_1 - VU_1 = 0.$$

Les polynômes U et V , d'après le théorème précédent, sont premiers entre eux; par suite, U doit diviser U_1 et l'on a

$$U = \lambda U_1;$$

d'où

$$V = \lambda V_1,$$

λ étant une constante: le système (U_1, V_1) est donc identique au système (U, V) .

III. S'il existe plus d'un système de polynômes U et V de degrés $m - 1$ et $p - 1$ satisfaisant à l'identité d'Euler, les polynômes $F(x, y)$, $G(x, y)$ admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur à un.

Cela résulte immédiatement du théorème précédent, car U et V ne sauraient dans ce cas être premiers entre eux, à cause de l'égalité

$$UV_1 - VU_1 = 0,$$

qui nous ferait voir que les deux systèmes (U, V) , (U_1, V_1) rentrent dans un seul. U et V admettant un

plus grand commun diviseur Θ , qui est au moins du premier degré, on a

$$U = \Theta U_2,$$

$$V = \Theta V_2,$$

et l'identité

$$U_2 G(x, y) + V_2 F(x, y) = 0$$

nous montre que $F(x, y)$ et $G(x, y)$ admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur à un.

IV. *S'il n'existe qu'un seul système de polynômes U et V de degrés respectifs $m-1$ et $p-1$, qui donnent l'identité d'Euler, les polynômes $F(x, y)$, $G(x, y)$ n'admettent qu'un facteur linéaire commun.*

Cette proposition est une conséquence immédiate des précédentes ; car, si les polynômes $F(x, y)$, $G(x, y)$ admettaient un plus grand commun diviseur de degré λ , λ étant plus grand que un, on aurait

$$F(x, y) = \Theta F_1(x, y),$$

$$G(x, y) = \Theta G_1(x, y),$$

et, par suite,

$$F_1(x, y) G(x, y) - G_1(x, y) F(x, y) = 0.$$

En multipliant les deux membres par un polynôme arbitraire Φ de degré $\lambda - 1$, on obtiendrait une infinité de fonctions de degrés $m - 1$ et $p - 1$, à savoir

$$\Phi F_1(x, y) \quad \text{et} \quad \Phi G_1(x, y),$$

qui satisferaient à l'identité d'Euler, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3. Cherchons maintenant en fonction des coefficients de $F(x, y)$ et de $G(x, y)$ la condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes $F(x, y)$ et $G(x, y)$ aient un facteur commun.

Il faudra, d'après ce qui précède, qu'en posant

$$U = \alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} y + \dots + \alpha_{m-1} y^{m-1},$$

$$V = \beta_0 x^{p-1} + \beta_1 x^{p-2} y + \dots + \beta_{p-1} y^{p-1},$$

on ait identiquement, pour des valeurs convenables des coefficients α et β ,

$$U G(x, y) + V F(x, y) = 0.$$

Si

$$F(x, y) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + \dots + A_m y^m,$$

$$G(x, y) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} y + \dots + B_p y^p;$$

en égalant à zéro les coefficients de $x^{m+p-1}, x^{m+p-2} y, \dots, y^{m+p-1}$, on aura les équations

$$B_0 \alpha_0 + A_0 \beta_0 = 0,$$

$$B_1 \alpha_0 + B_0 \alpha_1 + \dots + A_1 \beta_0 + A_0 \beta_1 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$B_p \alpha_{m-1} + A_m \beta_{p-1} = 0.$$

Ces équations, au nombre de $m + p$, sont linéaires et homogènes par rapport aux $m + p$ inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}$.

Elles doivent admettre pour ces quantités des valeurs qui ne sont pas toutes nulles; il faut par suite que le déterminant d'ordre $m + p$ de leurs coefficients soit égal à zéro. Soit Δ ce déterminant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_0 & 0 & \dots & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & \dots & . & A_1 & A_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & . & \dots & . & \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & \dots & . & \dots & B_p & 0 & \dots & \dots & A_m \end{vmatrix}.$$

$\Delta = 0$ est la condition nécessaire pour que les deux fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$ aient un facteur commun au moins du premier degré.

Je vais démontrer que cette condition est dans tous les cas suffisante.

Supposons que $\Delta = 0$ et que l'un des déterminants d'ordre $m + p - 1$, mineur de Δ , ne soit pas nul. On pourra donner à l'une des inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ une valeur arbitraire et choisir $m + p - 1$ des équations, de telle sorte que le déterminant des inconnues qui y figurent ne soit pas nul ; ce sera le mineur que nous avons supposé différent de zéro ; les équations déterminent pour les $m + p - 1$ inconnues qui y figurent des valeurs de la forme

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \lambda_0 \alpha, & \beta_0 &= \mu_0 \alpha, \\ \alpha_1 &= \lambda_1 \alpha, & \beta_1 &= \mu_1 \alpha, \\ &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \\ \alpha_{m-1} &= \lambda_{m-1} \alpha, & \beta_{p-1} &= \mu_{p-1} \alpha, \end{aligned}$$

où α désigne la valeur de l'inconnue choisie arbitrairement et $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1}$ des quantités parfaitement déterminées qui ne sont pas toutes nulles, l'une d'elles étant égale à l'unité.

Les fonctions U et V sont donc

$$\begin{aligned} U &= \alpha(\lambda_0 x^{m-1} + \lambda_1 x^{m-2} y + \dots + \lambda_{m-1} y^{m-1}), \\ V &= \alpha(\mu_0 x^{p-1} + \mu_1 x^{p-2} y + \dots + \mu_{p-1} y^{p-1}); \end{aligned}$$

abstraction faite du facteur α , elles donnent le système unique de fonctions de degrés $m - 1$ et $p - 1$ satisfaisant à l'identité

$$U G(x, y) + V F(x, y) = 0.$$

La solution précédente étant la plus générale pour les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}$, il s'ensuit que, si un mineur d'ordre $m + p - 1$ de Δ est différent de zéro, il n'existe qu'un seul système de polynômes d'ordre $m - 1$ et $p - 1$ donnant l'identité d'Euler, et, par suite, d'après les théorèmes précédents, les deux fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ admettent pour plus grand commun diviseur une fonction du premier degré seulement.

Ce qui précède montre évidemment que les fonctions U et V sont effectivement de degrés $m - 1$ et $p - 1$; car λ_0 et μ_0 ne sauraient être nuls, les polynômes U et V s'abaisseraient aux degrés $m - 2$ et $p - 2$ au moins, et, en les multipliant par un polynôme arbitraire du premier degré, on obtiendrait une infinité de fonctions U et V de degrés $m - 1$ et $p - 1$ qui satisferaient à l'identité d'Euler, ce qui n'est pas possible d'après ce qui précède.

On voit donc que, si $\Delta = 0$ et si un mineur d'ordre $m + p - 1$ de Δ est différent de zéro, les deux fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ admettent pour plus grand commun diviseur une fonction qui n'est que du premier degré.

Si tous les déterminants d'ordre $m + p - 1$, mineurs de Δ , sont nuls, et si un déterminant d'ordre $m + p - 2$, mineur de Δ , n'est pas nul, la solution la plus générale du système des équations en $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \beta_0, \beta_1 \dots$ est de la forme

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = \lambda_0 \alpha + \lambda'_0 \alpha', & \beta_0 = \mu_0 \alpha + \mu'_0 \alpha', \\ \alpha_1 = \lambda_1 \alpha + \lambda'_1 \alpha', & \beta_1 = \mu_1 \alpha + \mu'_1 \alpha', \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \alpha_{m-1} = \lambda_{m-1} \alpha + \lambda'_{m-1} \alpha', & \beta_{p-1} = \mu_{p-1} \alpha + \mu'_{p-1} \alpha', \end{array}$$

où α et α' sont des arbitraires, $\lambda_0, \dots, \lambda'_0, \dots, \mu_0, \dots, \mu'_0, \dots$ des quantités parfaitement déterminées, qui ne sont pas toutes nulles.

Dans ce cas, les fonctions U et V prennent la forme

$$\begin{array}{l} U = \alpha U_1 + \alpha' U'_1, \\ V = \alpha V_1 + \alpha' V'_1, \end{array}$$

U_1, U'_1, V_1, V'_1 étant des polynômes bien déterminés.

Il existe, dans ce cas, une infinité de fonctions U et V

qui donnent l'identité d'Euler; par suite, d'après ce qui précède, $F(x, y)$ et $G(x, y)$ ont un plus grand commun diviseur, qui est au moins du deuxième degré.

On voit que U et V sont en nombre infini; car U_i et V_i ne peuvent pas être identiquement nuls à la fois, pas plus que U'_i et V'_i , puisque, dans l'expression de $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \beta_0, \beta_1, \dots$, un coefficient de α est égal à l'unité, ainsi qu'un coefficient de α' .

On voit donc que, si $\Delta = 0$ et si tous les mineurs d'ordre $m + p - 1$ de Δ sont nuls, les fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$ admettent un facteur commun qui est au moins du second degré.

Il en serait de même si l'ordre du premier des mineurs qui ne s'annule pas s'abaissait au-dessous de l'ordre $m + p - 2$.