

H. RESAL

Note sur la courbure des lignes géodésiques d'une surface de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 57-60

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__57_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LA COURBURE DES LIGNES GÉODÉSIQUES
D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION;**

PAR M. H. RESAL.

1. La formule que je vais établir est peut-être connue, mais je n'en ai trouvé de trace nulle part.

Soient

$O\gamma$ l'axe de révolution;

m l'intersection d'une ligne géodésique donnée avec une courbe méridienne;

$R' = \overline{mN}$ la portion de la normale à cette courbe limitée à $O\gamma$;

R le rayon de courbure de la même courbe, considéré comme positif ou négatif selon qu'il aura ou non le même sens que $\overline{mN}$;

α l'inclinaison en m de la ligne géodésique sur la méridienne;

Ox un axe coordonné compris dans le plan γNm , perpendiculaire à $O\gamma$, la position de l'origine O restant indéterminée;

ϱ le rayon de courbure en m de la ligne géodésique, et dont le signe déterminera le sens.

On a d'abord

$$(1) \quad \frac{\cos^2 \alpha}{R} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'} = \frac{1}{\varrho}.$$

Je considérerai la ligne géodésique comme étant décrite par un point matériel soustrait à l'action de toute force extérieure, assujéti à rester sur la surface. D'après l'équation des forces vives, la vitesse v du mobile est

constante et le principe des aires donne

$$\nu \sin \alpha = \text{const.},$$

ou, en désignant par x_0, α_0 les valeurs de x, α qui se rapportent à un point déterminé de la ligne géodésique,

$$(2) \quad x \sin \alpha = x_0 \sin \alpha_0 = K.$$

En éliminant α entre les équations (1) et (2), on trouve pour la formule cherchée

$$(3) \quad \frac{x^2}{R} + \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) K^2 = \frac{x^2}{\rho}.$$

On tirera de cette formule des conséquences plus ou moins intéressantes lorsque la courbe méridienne sera une cycloïde, une chaînette, ou sera telle que

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{const.}$$

Mais je ne m'arrêterai qu'à l'application suivante.

2. *Surfaces de révolution du second degré.* — Soit

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

l'équation de la courbe génératrice : on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax}{By}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{A}{B^2y^3} (Ax^2 + By^2) = -\frac{A}{B^2y^3};$$

on déduit de là

$$\begin{aligned} \pm \frac{1}{R^1} &= \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{AB}{(A^2x^2 + B^2y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \pm \frac{1}{R'} &= -\frac{\frac{dy}{dx}}{x \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{A}{(A^2x^2 + B^2y^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

1° *Ellipsoïde*. — On posera $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$ et l'on aura

$$(4) \quad \frac{1}{R} = \frac{a^4 b^4}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(4') \quad \frac{1}{R'} = \frac{b^2}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

d'où

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{b^2(b^4 x^2 + a^4 y^2 - a^4 b^2)}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, en éliminant y^2 au numérateur au moyen de l'équation de l'ellipse,

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{b^4(b^2 - a^2)x^2}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)} = \frac{1}{a^4} \frac{(b^2 - a^2)x^2}{R}.$$

La formule (3) devient alors

$$(5) \quad \frac{1}{R} \left[1 + \frac{K^2(b^2 - a^2)}{a^4} \right] = \frac{1}{\rho}.$$

Il suit de là que *le rapport du rayon de courbure en un point de la ligne géodésique au rayon de courbure de l'ellipse méridienne menée par ce point est constant*. Ce théorème, qui paraît être dû à Gudermann (*Journal de Crelle*, t. 17), s'étend, comme on va le voir, aux autres surfaces de révolution du second degré.

2° *Paraboloïde*. — Si l'on pose $\frac{a^2}{b} = p$, puisque l'on suppose $a = \infty$, la formule (5) donne, pour le paraboloïde,

$$(6) \quad \frac{1}{R} \left(1 + \frac{K^2}{p^2} \right) = \frac{1}{\rho}.$$

3° *Hyperboloïde à une nappe*. — On devra prendre $A = \frac{1}{a^2}$, $B = -\frac{1}{b^2}$. Les équations (4) et (4') s'appli-

quent ici; mais il faudra changer le signe du second membre de la première; on trouve ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} &= \frac{b^2}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}} (b^4x^2 + a^4y^2 + a^4b^2) \\ &= \frac{b^4}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}} (a^2 + b^2)x^2 = -\frac{1}{a^4} \frac{(a^2 + b^2)x^2}{R}\end{aligned}$$

et la formule (3) devient

$$(7) \quad \frac{1}{R} \left[1 - \frac{K^2(a^2 + b^2)}{a^4} \right] = \frac{1}{\rho}.$$

4^o *Hyperboloïdes à deux nappes*. — Les formules (4) et (4') ne changent pas et l'on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} &= \frac{b^2(b^4x^2 + a^4y^2 - a^4b^2)}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{b^4(a^2 + b^2)}{(b^4x^2 + a^4y^2)} x^2 = \frac{(a^2 + b^2)x^2}{a^4 R},\end{aligned}$$

et enfin la formule (3) donne

$$(8) \quad \frac{1}{R} \left[1 + \frac{K^2(a^2 + b^2)}{a^4} \right] = \frac{1}{\rho}.$$