

BALITRAND

Sur l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 45-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__45_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$;

PAR M. BALITRAND,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

M. Victor de Strékalof a donné (3^e série, t. V, p. 533) une méthode qui permet de trouver simplement et brièvement l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$. Nous nous proposons, dans cette petite Note, d'appliquer ce procédé à la recherche de l'intégrale plus générale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$. Nous adopterons les notations de M. Victor de Strékalof et nous poserons avec lui

$$z = \tan \varphi, \quad \text{d'où} \quad dz = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

On a

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{(1+z^2)^n} &= \int (\cos^2 \varphi)^n d(\tan \varphi) \\ &= \tan \varphi \cos^{2n} \varphi - \int \tan \varphi d(\cos^{2n} \varphi). \end{aligned}$$

Nous sommes donc ramené à la recherche de l'intégrale $\int \tan \varphi d(\cos^{2n} \varphi)$. Calculons la différentielle de $\cos^{2n} \varphi$:

$$\begin{aligned} d(\cos^{2n} \varphi) &= -2n \cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= -2n \cos^{2n-1} \varphi \cos \varphi \tan \varphi d\varphi; \end{aligned}$$

donc

$$\int \tan \varphi d(\cos^{2n} \varphi) = -2n \int \tan^2 \varphi \cos^{2n} \varphi d\varphi,$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} & -2n \int (1 + \tan^2 \varphi - 1) \cos^{2n} \varphi \, d\varphi \\ & = -2n \int \cos^{2(n-1)} \varphi \, d\varphi + 2n \int \cos^{2n} \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

On voit donc que l'on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} & \int \cos^{2n} \varphi \, d(\tan \varphi) \\ & = \int \cos^{2(n-1)} \varphi \, d\varphi \\ & = \tan \varphi \cos^{2n} \varphi + 2n \int \cos^{2(n-1)} \varphi \, d\varphi - 2n \int \cos^{2n} \varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

ou bien

$$(1) \quad \begin{cases} \int \cos^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2n} \tan \varphi \cos^{2n} \varphi \\ \quad + \frac{2n-1}{2n} \int \cos^{2(n-1)} \varphi \, d\varphi. \end{cases}$$

Cette égalité ramène la recherche de l'intégrale $\int \cos^{2n} \varphi \, d\varphi$ à celle de l'intégrale $\int \cos^{2(n-1)} \varphi \, d\varphi$. Dans l'égalité (1), donnons à n les valeurs successives

$$n, \quad n-1, \quad n-2, \quad \dots, \quad 2, \quad 1;$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \cos^{2n} \varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2n} \tan \varphi \cos^{2n} \varphi + \frac{2n-1}{2n} \int \cos^{2(n-1)} \varphi \, d\varphi, \\ \int \cos^{2(n-1)} \varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2(n-1)} \tan \varphi \cos^{2(n-1)} \varphi + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \cos^{2(n-2)} \varphi \, d\varphi, \\ \int \cos^{2(n-2)} \varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2(n-2)} \tan \varphi \cos^{2(n-2)} \varphi + \frac{2n-5}{2(n-2)} \int \cos^{2(n-3)} \varphi \, d\varphi, \\ &\dots\dots\dots, \\ \int \cos^{2(n-p+1)} \varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2(n-p+1)} \tan \varphi \cos^{2(n-p+1)} \varphi \\ &\quad + \frac{2n-2p+1}{2(n-p+1)} \int \cos^{2(n-p)} \varphi \, d\varphi, \\ &\dots\dots\dots, \\ \int \cos^2 \varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2} \tan \varphi \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \varphi. \end{aligned}$$

De cette série d'égalités, on déduit facilement

$$\begin{aligned}
 & \int \cos^{2n} \varphi \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{2n} \tan \varphi \cos^{2n} \varphi + \frac{1}{2(n-1)} \frac{2n-1}{2n} \tan \varphi \cos^{2(n-1)} \varphi \\
 &+ \frac{1}{2(n-2)} \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n \cdot 2(n-1)} \tan \varphi \cos^{2(n-2)} \varphi + \dots \\
 &+ \frac{1}{2(n-p)} \frac{(2n-1)(2n-3) \dots (2n-2p+1)}{2n \cdot 2(n-1) \dots 2(n-p+1)} \tan \varphi \cos^{2(n-p+1)} \varphi + \dots \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1}{2n \cdot 2(n-1) \dots 4 \cdot 2} \tan \varphi \cos^2 \varphi \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1}{2n \cdot 2(n-1) \dots 4 \cdot 2} \varphi + \text{const.}
 \end{aligned}$$

On trouve finalement, en remplaçant $\cos^2 \varphi$ et $\tan \varphi$ par leurs valeurs,

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{2n} \frac{z}{(1+z^2)^n} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{2n-1}{2n} \frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + \dots \\
 &+ \frac{1}{2(n-p)} \frac{(2n-1)(2n-3) \dots (2n-2p+1)}{2n \cdot 2(n-1) \dots 2(n-p+1)} \frac{z}{(1+z^2)^{n-p+1}} + \dots \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1}{2n \cdot 2(n-1) \dots 4 \cdot 2} \frac{z}{1+z^2} \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1}{2n \cdot 2(n-1) \dots 4 \cdot 2} \arctan z + \text{const.}
 \end{aligned}$$