

GEORGES MAUPIN

**Sur une question posée aux examens oraux
d'admission à l'École polytechnique**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 419-421

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__419_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE QUESTION POSÉE AUX EXAMENS ORAUX D'ADMISSION
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ;**

PAR M. GEORGES MAUPIN,
Élève en Mathématiques au lycée de Rennes.

On donne un paraboloides hyperbolique équilatère et une ellipse dans un de ses plans directeurs. A cette ellipse on mène une tangente, et l'on considère une génératrice du paraboloides qui lui soit perpendiculaire. Trouver le lieu de la perpendiculaire commune à la tangente et à la génératrice.

Je vais démontrer que ce lieu se compose :

- 1° D'un cylindre droit, ayant pour base une podaire de l'ellipse ;
- 2° De deux paraboloides hyperboliques, égaux entre eux et égaux au paraboloides donné ;
- 3° Du plan de l'ellipse.

Soient ox, oy, oz trois axes rectangulaires ; les plans yox et zox sont les plans directeurs du paraboloides et o est le sommet. Il y a lieu de considérer successivement les génératrices qui sont parallèles au plan xoy et celles

qui sont parallèles au plan zox ; les premières rencontrent oz et les secondes s'appuient sur oy .

1° Si G est une génératrice parallèle à xoy , il y a toujours deux tangentes à l'ellipse qui sont perpendiculaires à G ; soit T l'une quelconque d'entre elles. La perpendiculaire commune à G et à T est parallèle à oz ; soit d'ailleurs g la projection de G sur xoy ; le point m où elle coupe T est la trace de la perpendiculaire commune. Or le lieu du point m est la podaire de o par rapport à l'ellipse, c'est-à-dire une quartique. Donc le lieu de la perpendiculaire commune est le cylindre du quatrième ordre, admettant cette quartique comme directrice et ayant ses génératrices parallèles à oz .

2° Considérons maintenant une génératrice Γ parallèle à zox ; supposons qu'il lui corresponde une tangente Θ de l'ellipse. L'angle formé par Γ et Θ a un côté dans le plan xoy : donc il se projette sur ce plan suivant un angle droit; et comme la projection γ à Γ est parallèle à ox , Θ sera perpendiculaire à ox .

Ainsi la tangente Θ est menée à l'ellipse parallèlement à oy . Il y a deux tangentes parallèles à oy , je les désignerai par Θ et Θ_1 .

Cherchons le lieu correspondant à Θ ; par le point où se coupent γ et Θ menons la perpendiculaire à Γ : cette droite sera la perpendiculaire commune P . Or supposons que le paraboloidé donné glisse parallèlement à lui-même, le long de ox , de manière que oy vienne s'appliquer sur Θ , puis qu'on lui imprime une rotation de 90° autour de Θ . On voit qu'après ce double mouvement la génératrice Γ sera confondue avec P , qu'à toute génératrice du paraboloidé correspondra ainsi une génératrice du lieu, ou qu'enfin le paraboloidé sera confondu avec le lieu de P .

Le lieu de P est donc un paraboloidé égal au premier:

il a pour plans directeurs xoz et zoy , et ox et Θ sont les génératrices qui passent par le sommet. De même le lieu correspondant à Θ est un troisième paraboloides, qui se déduit du second en transportant celui-ci parallèlement à lui-même, le long de ox , jusqu'à ce que Θ soit venu en Θ_1 .

3° Nous avons dit (2°) que les génératrices Γ se projettent parallèlement à ox ; il y a exception pour la génératrice oz . Cette génératrice est projetée suivant le point o , elle est perpendiculaire à toutes les tangentes à c , et le lieu des perpendiculaires communes qui lui correspondent est le plan xoy .