

H. LAURENT

Sur le calcul d'une fonction symétrique

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 416-419

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__416_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

A sera le produit des différences des racines de $\varphi = 0$
et l'on aura

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \psi(\alpha_1) & \psi(\alpha_2) & \dots & \psi(\alpha_m) \\ \alpha_1 \psi(\alpha_1) & \alpha_2 \psi(\alpha_2) & \dots & \alpha_n \psi(\alpha_m) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_1^{m-1} \psi(\alpha_1) & \alpha_2^{m-1} \psi(\alpha_2) & \dots & \alpha_m^{m-1} \psi(\alpha_m) \end{vmatrix} = A \psi(\alpha_1) \psi(\alpha_2) \dots \psi(\alpha_n).$$

Or on a

$$\psi_j(\alpha_i) = \alpha_{j1} \alpha_i^{m-1} + \alpha_{j2} \alpha_i^{m-2} + \dots + \alpha_{jn} :$$

donc, en vertu de (1),

$$\alpha_i^{j-1} \psi(\alpha_i) = \alpha_{j1} \alpha_i^{m-1} + \alpha_{j2} \alpha_i^{m-2} + \dots + \alpha_{jm};$$

donc, le déterminant qui figure dans le premier membre de (2) est le produit de R par A. La formule (2) donne alors

$$RA = A \psi(\alpha_1) \psi(\alpha_2) \dots,$$

ou enfin

$$(3) \quad \psi(\alpha_1) \psi(\alpha_2) \dots \psi(\alpha_m) = R.$$

La fonction R est donc le premier membre de la résultante des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Il est d'ailleurs facile de reconnaître, dans les polynômes ψ_1 , ψ_2 , ..., ceux qui servent à Cauchy pour former sa résultante.

C'est, je crois, la première fois que l'identité (3) est démontrée directement. Le théorème de Bézout en découle.

Cette méthode peut être généralisée et étendue à un nombre quelconque d'équations à l'aide de la notion des polynômes réduits et des équivalences algébriques dont j'ai présenté la théorie dans les *Nouvelles Annales* l'année dernière.

Considérons les équations algébriques

$$(1) \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_n = 0,$$

Ann. de Mathémat., 3^e série, t. VI. (Septembre 1887.) 28

des degrés $m_1, m_2, \dots, m_n$ par rapport aux inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ et soit ψ une fonction entière de $x_1, x_2, \dots, x_n$ de degré μ . Appelons $\omega = \omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{p-1}$ les $p = m_1 m_2 \dots m_n$ arguments réduits, c'est-à-dire les quantités de la forme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$ qui ne contiennent pas de facteur $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_n^{m_n}$. Soient $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ les polynômes réduits équivalents à $\omega^0 \psi, \omega^1 \psi, \dots, \omega^{p-1} \psi$; enfin désignons en général par $(F)_i$ ce que devient un polynôme F quand on y remplace $x_1, x_2, \dots, x_n$ par les éléments de la $i^{\text{ème}}$ solution des équations (1) que nous supposons distinctes, finies et au nombre de p . Posons

$$\Theta = \begin{vmatrix} (\psi_0)_1 & (\psi_1)_1 & \dots & (\psi_{p-1})_1 \\ (\psi_0)_2 & (\psi_1)_2 & \dots & (\psi_{p-1})_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\psi_0)_p & (\psi_1)_p & \dots & (\psi_{p-1})_p \end{vmatrix}.$$

Si l'on pose

$$\Omega = \begin{vmatrix} (\omega^0)_1 & (\omega^1)_1 & \dots & (\omega^{p-1})_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\omega^0)_p & (\omega^1)_p & \dots & (\omega^{p-1})_p \end{vmatrix},$$

et si, faisant, en général,

$$\psi_j = \alpha_{j0} \omega^0 + \alpha_{j1} \omega^1 + \dots + \alpha_{jp-1} \omega^{p-1},$$

on désigne par R le déterminant $\Sigma \alpha_{00} \alpha_{11} \dots \alpha_{p-1 p-1}$, on observe que l'on a

$$(\psi_j)_i = (\omega^j \psi)_i,$$

on trouvera

$$(2) \quad \Theta = \Omega R;$$

mais le déterminant Θ peut aussi se mettre sous la forme

$$\Theta = \begin{vmatrix} (\psi)_1 (\omega^0)_1 & (\psi)_1 (\omega^1)_1 \\ (\psi)_2 (\omega^0)_2 & (\psi)_2 (\omega^1)_2 \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

ou

$$(3) \quad \Theta = (\psi)_1 (\psi)_2 \dots (\psi)_p.$$

De (2) et (3) on conclut

$$R = (\psi)_1 (\psi)_2 \dots (\psi)_n,$$

et $R = 0$ est la résultante du système

$$\psi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_n = 0$$

L'évaluation du degré de R ne présente d'ailleurs aucune difficulté.