

N. GOFFART

**Solution analytique de la question
proposée en 1884 pour l'admission à
l'École polytechnique**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 395-399

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__395_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE EN 1884
POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.**

PAR M. N. GOFFART.

On donne une conique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. On joint un point M de cette conique aux foyers F et F'.

1° On demande d'exprimer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle FMF' au moyen des coordonnées de M.

2° Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que, si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondant à deux points M et M' de la conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le point milieu de la corde MM';

3° Pour chaque position du point M, le rayon vecteur FM touche le cercle correspondant en un point P; on déterminera en coordonnées polaires l'équation du

lieu décrit par le point P. On prendra le foyer F pour origine des rayons et OX pour origine des angles.

Nota. — Dans toutes ces questions, il est nécessaire de distinguer les cas où la conique est une ellipse et celui où elle est une hyperbole.

1° En désignant par F et F' les deux foyers, F' étant celui qui est sur la partie positive de l'axe des x , on sait qu'on a

$$FM = a + \frac{cx}{a}, \quad FM' = \pm \left(a - \frac{cx}{a} \right),$$

le signe + appartenant à l'ellipse, le signe — à l'hyperbole (branche F'). Par suite, si p désigne le demi-périmètre du triangle FMF', on a

$$\text{Dans l'ellipse : } p = a + c.$$

$$\text{Dans l'hyperbole : } p = \frac{cx}{a} + c.$$

Désignons maintenant par C le centre du cercle inscrit, par C_M , C_F , $C_{F'}$ les centres des cercles exinscrits; les coordonnées de ces centres seront désignées par X, Y munis des indices correspondants.

Ces quatre centres se classent ainsi :

C et C_M sont sur la normale dans l'ellipse, et sur la tangente dans l'hyperbole; C_F et $C_{F'}$ sont au contraire sur la tangente dans l'ellipse et sur la normale dans l'hyperbole.

On a ensuite

$$c + X = p - MF', \quad c + X_M = p - MF',$$

$$c + X_F = p, \quad c - X_{F'} = p,$$

$$cY = pY = -(\rho - FF')Y_M = (\rho - MF')Y_{F'} = (\rho - MF)Y_F :$$

substituant dans ces relations les valeurs de p , FF' , MF ,

MF', il vient, dans l'ellipse,

$$X = \frac{cx}{a}, \quad Y = \frac{cy}{a+c},$$

$$X_M = -\frac{cx}{a}, \quad Y_M = -\frac{cy}{a-c},$$

$$X_F = a, \quad Y_F = \frac{ay}{a+x},$$

$$X_{F'} = -a, \quad Y_{F'} = \frac{ay}{a-x},$$

et, pour l'hyperbole,

$$X = a, \quad Y = \frac{ay}{a+x},$$

$$X_M = -a, \quad Y_M = -\frac{ay}{x-a},$$

$$X_F = \frac{cx}{a}, \quad Y_M = \frac{cy}{c+a},$$

$$X_{F'} = -\frac{cx}{a}, \quad Y_{F'} = \frac{cy}{c-a},$$

Les expressions X et Y répondent à la première partie de l'énoncé. Mais on voit que X_M et Y_M jouent un rôle à peu près analogue. Enfin les cercles C et C_M dans l'ellipse sont représentés par les cercles C_F et $C_{F'}$ dans l'hyperbole. Les lieux des centres C et C_M dans l'ellipse (ou de C_F et $C_{F'}$ dans l'hyperbole) sont respectivement

$$\frac{X^2}{c^2} + \frac{Y^2}{c^2} \frac{a+c}{a-c} = 1, \quad \frac{X^2}{c^2} + \frac{Y^2}{c^2} \frac{a-c}{a+c} = 1,$$

qui sont des ellipses relativement à l'ellipse, ou des hyperboles relativement à l'hyperbole.

Les lieux de C_F et $C_{F'}$ dans l'ellipse (ou de C et C_M dans l'hyperbole) sont les tangentes aux sommets A et A' des coniques.

2° Si, par rapport à deux points M et M', on considère dans l'ellipse les cercles C et C_M , ou dans l'hyperbole les

cercles C_F et $C_{F'}$, ils donnent lieu à la deuxième partie de l'énoncé. L'équation concernant le cercle C est, par exemple,

$$\left(\eta - \frac{c}{a+c} y \right)^2 + \left(\xi - \frac{c}{a} x \right)^2 = \frac{c^2 y^2}{(a+c)^2}.$$

En retranchant une équation semblable pour le point $M'(x', y')$, on aura l'équation de l'axe radical

$$\begin{aligned} \left(\eta - \frac{c}{a+c} \frac{y+y'}{2} \right) \frac{c}{a+c} (y-y') \\ + \left(\xi - \frac{c}{a} \frac{x+x'}{2} \right) \frac{c}{a} (x-x') = \left(\frac{c}{a+c} \right)^2 \frac{y'^2 - y^2}{2}. \end{aligned}$$

D'après l'équation de l'ellipse $\frac{x^2 - x'^2}{a^2} = \frac{y'^2 - y^2}{a^2 - c^2}$, en tenant compte de cette relation, et faisant dans l'équation de l'axe radical

$$\eta = \frac{y+y'}{2}, \quad \xi = \frac{x+x'}{2},$$

elle devient

$$\frac{y^2 - y'^2}{2} \left(\frac{c}{a+c} - \frac{c}{a-c} \right) = 0.$$

Elle est donc satisfaite par les coordonnées du milieu de la corde MM' .

Ces propriétés n'ont pas lieu pour les autres cercles.

3° D'après ce qu'on a dit, on a

$$\begin{aligned} FP &\doteq c + X = c + \frac{cx}{a} \text{ dans l'ellipse,} \\ &= a + c \text{ dans l'hyperbole;} \end{aligned}$$

donc, dans ce dernier cas, le lieu de P est le cercle de centre F et de rayon $a + c$. Pour l'ellipse

$$\rho = c + \frac{cx}{a}; \quad c + x = MF \cos \omega = \left(a + \frac{cx}{a} \right) \cos \omega;$$

éliminant x , il reste, pour l'équation du lieu de P,

$$\rho = \frac{c(a-c)(1-\cos\varphi)}{a-c\cos\varphi};$$

si l'on remarque que

$$FM - FP = \left(a + \frac{cx}{a}\right) - \left(c + \frac{cx}{a}\right) = a - c,$$

on voit que cette courbe est une *conchoïde* de l'ellipse par rapport au foyer F : elle est fermée.

En prenant le cercle c_M , on obtiendrait un cercle dans l'ellipse et une conchoïde (à branches infinies) de l'hyperbole, dans l'hyperbole.

Enfin, si l'on prend les autres cercles, on aura des relations analogues aux précédentes ; par exemple, des cercles de rayon $a + c$ et $a - c$ pour les lieux des points de contact de FM avec C_F et $C_{F'}$.