

R. DE CRÈS

**Solution de la question du concours
d'admission à l'École normale (1886)**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 369-372

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6_369_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION DU CONCOURS D'ADMISSION
A L'ÉCOLE NORMALE (1886);**

PAR M. R. DE CRÈS,
Ingénieur civil.

On considère les courbes du troisième degré C, représentées par l'équation

$$(1) \quad x^2y + a^2x = \lambda,$$

où λ désigne un paramètre variable :

1° *Démontrer qu'il existe deux courbes de cette espèce, tangentes à une droite quelconque D du plan ayant pour équation*

$$(2) \quad y = mx + p,$$

et calculer les coordonnées (α, β) , (α', β') des deux points de contact M et M'.

Pour qu'une courbe C touche la droite D en un point dont l'abscisse est x' , il faut et il suffit que l'équation

$$mx^3 + px^2 + a^2x - \lambda = 0,$$

aux abscisses des points communs à la courbe et à la droite, ait pour racines

$$x', \quad x', \quad -\left(\frac{p}{m} + 2x'\right);$$

ce qui, en vertu des relations entre les coefficients et les racines, s'exprime par les relations

$$(3) \quad 3mx'^2 + 2px' + a^2 = 0.$$

$$(4) \quad x'^2 \left(2x' + \frac{p}{m} \right) = \lambda.$$

L'équation (3) donne pour x' deux valeurs réelles ou imaginaires, à chacune desquelles répond une valeur de λ fournie par la relation (4).

Il y a donc deux courbes C tangentes à la droite D et les coordonnées des deux points de contact $M(\alpha, \beta)$, $M'(\alpha', \beta')$ sont données par les formules

$$(5) \quad \alpha = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 3ma^2}}{3m},$$

$$(6) \quad \beta = m\alpha + p = \frac{2p + \sqrt{p^2 - 3ma^2}}{3},$$

$$(5') \quad \alpha' = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 3ma^2}}{3m},$$

$$(6') \quad \beta' = m\alpha' + p = \frac{2p - \sqrt{p^2 - 3ma^2}}{3}.$$

2° Distinguer les droites D pour lesquelles les deux points M et M' sont réels des droites pour lesquelles ils sont imaginaires. Examiner pour quelles positions de la droite D les deux points M et M' viennent se confondre en un seul, et trouver, dans ce cas, le lieu décrit par le point de contact.

Les points M et M' sont confondus lorsqu'on a

$$(7) \quad p^2 - 3ma^2 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque la droite D a une équation de la forme

$$y = mx \pm a\sqrt{3m};$$

mais cette droite enveloppe l'hyperbole

$$(8) \quad 4xy - 3a^2 = 0;$$

et l'équation aux abscisses des points communs à cette hyperbole et à la droite (1) montre que cette droite (1) coupe l'hyperbole ou lui est extérieure suivant que l'expression $p^2 - 3ma^2$ est positive ou négative. Donc

les points M et M' sont réels et distincts, confondus ou imaginaires suivant que la droite D coupe l'hyperbole (8), la touche ou lui est extérieure.

Lorsque les points M et M' sont confondus, les valeurs (5) et (6), (5') et (6') se réduisent à

$$\alpha_1 = -\frac{p}{3m}, \quad \beta_1 = \frac{2p}{3},$$

et il suffit d'éliminer p et m entre ces relations et la condition (7) pour avoir l'équation

$$3\alpha_1\beta_1 + 2a^2 = 0,$$

du lieu décrit par le point de contact; c'est une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.

3° *Connaissant les coordonnées (α, β) du point de contact M d'une courbe C avec une droite D , trouver les coordonnées (α', β') du second point de contact M' situé sur D . Construire la courbe décrite par le point M' lorsque le point M décrit la droite*

$$(9) \quad \beta = \alpha - 2a.$$

Les abscisses α et α' étant les racines de l'équation (3), on a

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = -\frac{2p}{a^2}, \quad \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha'} = \frac{3m}{a^2};$$

et, en portant ces valeurs de m et de p dans

$$\beta = m\alpha + p, \quad \beta' = m\alpha' + p,$$

on obtient les relations

$$\beta = -\frac{a^2}{6} \left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{3}{\alpha} \right); \quad \beta' = -\frac{a^2}{6} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha'} \right),$$

d'où l'on déduit, soit

$$(10) \quad \alpha' = -\frac{a^2\alpha}{3(2\alpha\beta + a^2)}, \quad \beta' = \frac{9\alpha\beta + 4a^2}{3\alpha},$$

soit

$$\alpha = -\frac{\alpha^2 \alpha'}{3(2\alpha' \beta' + \alpha^2)}, \quad \beta = \frac{9\alpha' \beta' + 4\alpha^2}{3\alpha'}.$$

Enfin, il suffit de porter ces valeurs de α et de β dans (9) pour avoir l'équation

$$18x^2y^2 + 12ax^2y + 17a^2xy + a^2x^2 + 6a^3x + 4a^4 = 0,$$

du lieu que décrit le point M' lorsque le point M parcourt la droite (9) (nous avons mis x et y au lieu de α' et β'). C'est une quartique dont la construction n'offre aucune difficulté, puisque l'équation est du second degré soit par rapport à x , soit par rapport à y . On peut aussi se servir des expressions (10), après y avoir remplacé β par la valeur (9), pour construire la courbe qui est unicursale.

MM. Chambon et Barisien ont aussi envoyé des solutions de cette question.