Nouvelles annales de mathématiques

WEILL

Sur la courbe du quatrième degré à deux points doubles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 272-274

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__272_1>

SUR LA COURBE DU QUATRIÈME DEGRÉ A DEUX POINTS DOUBLES;

PAR M. WEILL.

Un point d'une conique étant défini, à l'aide du paramètre variable λ, par les équations

$$\alpha = \lambda\gamma, \qquad \beta = \frac{\gamma}{\lambda},$$

α, β, γ désignant trois fonctions linéaires de x et y, les trois sommets d'un triangle qui se déplace en restant inscrit dans cette conique et circonscrit à une autre conique fixe correspondront à trois valeurs de λ données par l'équation du troisième degré

$$(1) \qquad \lambda^3 + (mC + n)\lambda^2 + (m'C + n')\lambda + C = 0,$$

dans laquelle C est un paramètre variant avec la position du triangle, les quantités m, m', n, n' étant constantes. Ceci posé, l'équation

$$K\alpha^2 + L\beta^2 + X\gamma^2 - 2Y\beta\gamma + 2Z\alpha\gamma + \alpha\beta = 0,$$

dans laquelle K et L sont des constantes, et X, Y, Z des variables, définit une conique passant par deux points fixes situés sur la droite $\gamma = 0$.

Cherchons à exprimer que trois des quatre points où cette conique variable rencontre la conique donnée forment les sommets d'un des triangles considérés.

Il faut pour cela que l'équation en λ du quatrième degré, qui donne les valeurs de λ correspondant à ces quatre points, admette un facteur de la forme (1). En faisant la division et écrivant que le reste est nul, on trouve les relations

$$2Z - K(mC + n) = \frac{L}{C},$$

$$X + 1 - (m'C + n')K = \frac{L}{C}(mC + n),$$

$$2Y - cK = \frac{L}{C}(m'C + n').$$

Transportant ces valeurs de X, Y, Z dans l'équation de la conique variable, elle devient

$$\begin{aligned} &C^2\gamma(Km\alpha - K\beta + m'\gamma) \\ &\quad - C\{K\alpha^2 + L\beta^2 - \alpha\beta + \gamma[m'L\beta + Kn\alpha + (mL + n'K - 1)\gamma]\} \\ &\qquad\qquad - L\gamma(\alpha + n'\beta + n\gamma) = 0. \end{aligned}$$

Telle est l'équation d'une conique, variable avec C, passant par deux points fixes et par les trois sommets d'un triangle variable inscrit et circonscrit à deux coniques fixes. On peut écrire cette équation

$$C^2\gamma.\delta - 2C.S - \gamma\delta' = 0.$$

On voit que, lorsque C varie, cette conique a pour enveloppe la courbe ayant pour équation

$$S^2 - \gamma^2\delta\delta' = 0.$$

Cette courbe du quatrième degré a pour points doubles les deux points fixes. Chaque conique variable touche son enveloppe en deux points, et la droite qui joint ces deux points passe par un point fixe, intersection des droites δ et δ'; cette droite, ayant pour équation $\delta' = C^2\delta$, correspond à deux coniques du système, elle rencontre l'enveloppe, qui est du quatrième degré, en quatre points qui se séparent en deux groupes de deux points, correspondant respectivement à deux coniques déterminées par les valeurs $+ C$ et $- C$ du paramètre.

Réciproquement, toute courbe du quatrième degré à deux points doubles peut être obtenue par ce procédé. En prenant pour points doubles les points cycliques, on obtient des résultats relatifs aux anallagmatiques du quatrième ordre, courbes qui ont été si souvent étudiées; on voit que ces courbes peuvent être considérées, d'une manière générale, comme l'enveloppe d'un cercle circonscrit à un triangle variable inscrit et circonscrit à deux coniques fixes. Ce mode de génération permet d'étudier, sous un point de vue nouveau, ces courbes si connues.

Revenons au cas général de la courbe à deux points doubles; en prenant pour triangle de référence celui qui est formé par les droites γ, δ, δ', on voit facilement qu'un point de la courbe est déterminé par des équations de la forme

$$\delta' : \delta : \gamma = C^2 : 1 : \varphi(C),$$

$\varphi(C)$ étant de la forme

$$\frac{aC^2 + bC + c + \sqrt{a'C^4 + \dots}}{a C^2 - b C + c},$$

et l'on en déduit, par des procédés connus, la représentation paramétrique à l'aide des fonctions elliptiques.